

Vol. 22 (2022): 51-95 ISSN 1578-8768

©Copyright of the authors of the article. Reproduction and diffusion is allowed by any means, provided it is done without economical benefit and respecting its integrity.

Análisis espectral de wavelet: una concisa revisión

Josué M. Polanco Martínez^{1,2}

¹GECOS-IME, Universidad de Salamanca, Salamanca, España. ²Basque Centre for Climate Change (BC3), Leioa, España.

Autor para correspondencia: Josué M. Polanco Martínez, josue.polanco@bc3research.org

(Recibido: 17-02-2022. Publicado: 27-04-2022.)

Resumen

En este artículo se presenta una concisa revisión de una de las herramientas más utilizadas en el procesamiento de señales, el análisis espectral de wavelet mediante la transformada continua de wavelet para los casos uni- y bi-variados. Esta herramienta es sumamente útil para analizar cualquier tipo de datos que no sean estacionarios, esto es, aquellos datos cuyas principales caractarísticas estadísticas (como la media o la varianza) cambian con el tiempo. El rango de aplicaciones de esta metodología es enorme, abarcando desde las ciencias experimentales (como la física o la ingeniería) hasta las ciencias sociales (como la economía o la arqueología). Sin embargo, y a pesar de que los ejemplos presentados en este artículo de revisión están relacionados con las ciencias ambientales, todos los conceptos teóricos así como los aspectos computacionales para usar esta técnica avanzada de procesamiento de señal son aplicables a cualquier área de las ciencias e ingenierías. Adicionalmente, en este artículo de revisión se presentan varios programas computacionales libremente distribuidos (de tipo software libre o de fuentes abiertas) que realizan análisis espectral vía la transformada continua de wavelet.

Palabras clave: wavelet, transformada continua de wavelet, espectro wavelet, correlación cruzada de wavelet, coherencia de wavelet.

Abstract

This article presents a short but concise review of one of the most used techniques in signal processing, the wavelet spectral analysis (WSA) via the continuous wavelet transform (CWT) for the uni- and bi-variate cases. This mathematical tool is very useful to analyse any kind of data that are not stationary, that is, data that their main statistical properties (such as the mean or the variance) can change with time. The range of applications of this methodology is enormous, ranging from experimental sciences (such as physics or engineering) to social sciences (such as economics or archaeology). However, and despite the fact that the examples presented in this review article are related to environmental sciences, all the theoretical concepts as well as the computational aspects to use this technique are applicable to any area of science or engineering. Additionally, this review article presents some freely distributed computer programs (of the free software or open source type) that perform spectral analysis via the continuous wavelet transform.

Keywords: wavelet, continuous wavelet transform, wavelet spectrum wavelet cross-correlation, wavelet coherence.

1. Introducción

El análisis espectral vía la transformada continua de wavelet (CWT, Continuous Wavelet Transform) es una herramienta poderosa para enfrentar el problema de la no estacionariedad o la presencia de eventos transitorios en una serie temporal. Esta técnica realiza una descomposición espectral localizada de la serie a estudio determinando los modos dominantes de variabilidad y cómo varían éstos en tiempo y escala (periodo) [Grossmann and Morlet, 1984, Torrence and Compo, 1998]. El análisis espectral vía la CWT incluye la estimación del poder espectral (análisis uni-variante), análisis espectral cruzado, la coherencia y la fase de la coherencia (análisis bi-variante y más recientemente análisis multi-variante) [Torrence and Webster, 1999, Grinsted et al., 2004, Maraun and Kurths, 2004, Cazelles et al., 2008, Mihanovic et al., 2009, Ng and Chan, 2012, Aguiar-Conraria and Soares, 2014, Soon et al., 2014, Hu and Si, 2016, Velasco-Herrera et al., 2017, Chavez and Cazelles, 2019, Oygur and Unal, 2020]. Las primeras aplicaciones de esta metodología fueron realizadas a series temporales geofísicas y ambientales (climáticas, hidrometeorológicas, etc.) y se remontan a principios de los noventa [Farge, 1992, Meyers et al., 1993, Kumar and Foufoula-Georgiou, 1994, Lau and Weng, 1995]. Sin embargo, no fue hasta la publicación del seminal trabajo de Torrence y Compo [Torrence and Compo, 1998] que esta herramienta llegó a ser popular. Quizá, en parte por el enfoque didáctico de esta publicación, pero también porque hicieron pública en internet (https://paos.colorado.edu/research/wavelets/) una herramienta computacional (en varios lenguajes computacionales, entre ellos Fortran, IDL, Matlab y Python) para realizar análisis espectral vía la CWT utilizando diferentes funciones wavelet (Morlet, Paul y DOG).

Con lo que respecta a las aplicaciones del análisis espectral vía la CWT a series ambientales y su relación con variables ecológicas (en particular, series que representan poblaciones de especies marinas), son menos frecuentes y más recientes. Uno de los primeros trabajos fue realizado por [Machu et al., 1999], quienes estudiaron la distribución del fitoplancton. Posteriormente, [Ménard et al., 2007] estudiaron la relación entre la variabilidad climática y la población del atún en el Océano Indico. [Rouyer et al., 2008b] estudiaron ampliamente diferentes modelos de ruido de fondo y los aplicaron a series de capturas de atún rojo. Un poco más tarde [Hsieh et al., 2009] estudiaron la relación de abundancia de la anchoa (en estado larval) y las variables ambientales en la costa Sudoeste de Taiwan. Más recientemente, [Polanco et al., 2011] analizaron la relación entre capturas por unidad de esfuerzo (CPUE) de pulpo común de las Islas Canarias y las temperaturas superficiales del océano (SST) y el índice de la Oscilación del Norte (NAO) mediante el análisis de la coherencia normalizada de wavelet y utilizaron la técnica desarrollada por [Maraun and Kurths, 2004]. Este es uno de los primeros trabajos donde se encontró una correlación mucha más marcada entre un índice climático (la NOA, la cual es una variable que afecta de manera indirecta a las especies marinas) y las capturas (CPUE) de una especie marina que con una variable climática observacional, como las SST (la cual es una de las principales variables que actúan y que afectan de manera directa a las especias marinas). Todo esto fue gracias al uso de la técnica de la coherencia de wavelet [Polanco et al., 2011,Polanco-Martínez, 2012]. Mucho más recientemente una gran cantidad de artículos han sido publicados donde se aplica el análisis espectral de wavelet (uni-, bi-variado y multi-variado) a series ambientales (e.g., [Cazelles et al., 2014, Rhif et al., 2019]). El objetivo de este trabajo es presentar una concisa revisión del análisis espectral (uni- y bi-variado) vía la transformada continua de wavelet desde un punto de vista metodológico (estadístico/matemático y computacional), así como aplicaciones a series temporales ambientales. Para ello, se utilizan las principales fuentes primarias y las

más relevantes sobre esta metodología e.g., [Meyers et al., 1993,Lau andWeng, 1995, Kumar and Foutoula-Georgiou, 1997, Torrence and Compo, 1998, Torrence and Webster, 1999, Maraun and Kurths, 2004, Grinsted et al., 2004, Maraun et al., 2007, Cazelles et al., 2008,Polanco et al., 2011, Polanco-Martínez, 2012, Cazelles et al., 2014, Chavez and Cazelles, 2019]. Este trabajo se organiza de la siguiente manera. La sección 2 presenta la definición formal de wavelet y las principales funciones wavelet utilizadas. La sección 3 proporciona la definición de la transformada continua de wavelet así como sus principales características. La sección 4 proporciona los elementos necesarios para la estimación del espectro para los casos uni- y bi-variado. La sección 5 presenta las diferentes pruebas de significación estadística del espectro para ambos casos: uniy bi-variado. La sección 6 proporciona algunos ejemplos con series temporales reales. La sección 7 presenta algunos paquetes computacionales para estimar el espectro wavelet y se ejemplifican su uso. Finalmente, la sección 8 proporciona las principales perspectivas a futuro de esta técnica.

2. Definición formal de wavelet

Los wavelets son un tipo de funciones reales o complejas $\psi(t)$ que, al igual que las funciones seno o coseno, pueden utilizarse como una base en un espacio de funciones. Tienen forma de pequeñas ondas que oscilan alrededor de cero, están definidas sobre el eje real $(-\infty, \infty)$ y satisfacen las siguientes condiciones [Percival and Walden, 2006]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0 \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt = 1 \tag{2}$$

La primera condición, conocida como de admisibilidad, implica que la función wavelet tenga media cero. La segunda condición asegura una localización suficiente en el dominio del tiempo y de la escala [Farge, 1992,Torrence and Compo, 1998]. Con respecto a la condición de admisibilidad, la transformada de Fourier $\Psi(f)$ de una función wavelet $\psi(t)$ también debe satisfacer [Farge, 1992,Percival and Walden, 2006] la siguiente condición

$$0 < \int_0^\infty \frac{|\Psi(f)|^2}{f} df < \infty \tag{3}$$

Existen diferentes tipos de funciones wavelet, *e.g.*, ortogonales, no ortogonales, continuas, discretas, reales, complejas, etc. Las pautas de qué tipo de función wavelet se utilizará en cada análisis, dependerá del tipo de proceso o fenómeno a estudio. Por ejemplo, en ciencias ambientales y geociencias es muy común el uso de funciones wavelet continuas de tipo complejo, en especial el wavelet de Morlet [Cazelles et al., 2008,Kumar and Foutoula-Georgiou, 1997,Torrence and Compo, 1998]. La razón de esto es que en el análisis de este tipo de señales (o series temporales, dependiendo del contexto) es necesario extraer información de la amplitud y de la fase del proceso a estudio, de manera particular para el caso bi-variado [Kumar and Foutoula-Georgiou, 1997, Cazelles et al., 2008].

2.1 La funcióon wavelet de Morlet

El wavelet de Morlet (Figura 1) es esencialmente una función exponencial compleja, cuya amplitud está modulada por una función proporcional a la función de densidad de probabilidad de una distribución Gaussiana estándar [Kumar and Foufoula-Georgiou, 1994, Percival and Walden, 2006], esto es

$$\psi(t) = C e^{-i\omega_0 t} (e^{-t^2/2} - \sqrt{2}e^{-\omega_o^2/4}e^{-t^2})$$
(4)

donde el valor de la constante C es seleccionado de tal modo que 4 pueda satisfacer la condición de admisibilidad 2 para un determinado valor de ω_0 [Percival and Walden, 2006]. Esto sucede cuando $\omega_0 \geq 5$ y, si se cumple la igualdad, entonces $C = 0.7528 \sim \pi^{-1/4}$. Si $\omega_0 \geq 5$, el segundo término de la expresión entre paréntesis de 4 se aproxima a cero. Por ello, es posible expresar la relación 4 [Kumar and Foufoula-Georgiou, 1994, Percival and Walden, 2006] como se hace habitualmente

$$\psi(t) = \pi^{-1/4} e^{-i\omega_0 t} e^{-t^2/2}, \quad \omega_0 \ge 5$$
(5)

A la expresión 5 se le conoce como el wavelet abreviado de Morlet, aunque es común utilizar simplemente el término wavelet de Morlet [Kumar and Foufoula-Georgiou, 1994]. La transformada de Fourier del wavelet de Morlet viene definida [Kumar and Foufoula-Georgiou, 1994] por

$$\Psi(\omega) = \pi^{-1/4} e^{-(\omega - \omega_0)^2/2}, \quad \omega_0 \ge 5$$
(6)



Figura 1: El wavelet de Morlet con tres diferentes valores de ω_0 : π , 1.5 π y 4π , respectivamente. Nótese la parte real (en línea continua) y la parte compleja (en línea discontinua) del wavelet. El parámetro ω_0 controla (resolución tiempo/escala) la frecuencia del exponencial complejo (5) que está modulado por una función Gaussiana. Si ω_0 aumenta, entonces el número de oscilaciones del wavelet también aumenta.

2.2 La función wavelet de Paul

Otras de las funciones wavelet complejas usadas (aunque no tiene la misma popularidad que Morlet) en el análisis espectral de wavelet es el wavelet de Paul (Figura 2). La cual es una función bien localizada en tiempo y escala y al ser una función compleja (como Morlet) también permite calcular la evaluación de la fase de una señal [Torrence and Compo, 1998, Afifi et al., 2002]. El wavelet de Paul es definido [Torrence and Compo, 1998, Afifi et al., 2002] de la siguiente manera

$$\psi(t) = \frac{2^m m! (1 - it)^{-(m+1)}}{2\pi \sqrt{(2m)!/2}} \tag{7}$$

donde m indica el orden de la función Paul y debe ser un número entero mayor e igual a 1 [Torrence and Compo, 1998, Afifi et al., 2002].

Por otro lado, la transformada de Fourier de la función de Paul viene dada Torrence and Compo, 1998, Afifi et al., 2002] por

$$\Psi(\omega) = \frac{2^m}{\sqrt{m(2m-1)!}} H(\omega) (a\omega)^m e^{-a\omega}$$
(8)

Donde H es la función o distribución de Heaviside. $H(\omega) = 1$ si $\omega > 0$, $H(\omega) = 1$ para cualquier otro valor.





número de oscilaciones del wavelet también aumenta.

2.3 La función wavelet de DOG

La función wavelet conocida como DOG significa *Derivative of a Gaussian* y es una función de tipo real (Figura ??). La definición de acuerdo con [Torrence and Compo, 1998] es la siguiente

$$\psi(t) = \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{\Gamma(m+\frac{1}{2})}} \frac{d^m}{d\eta^m} (e^{-\eta^2/2})$$
(9)

donde m indica el orden de la función wavelet, debe ser un numero entero mayor de 1 debido a que implica el número de veces a derivar la función exponencial, por ejemplo, si m = 2 es el wavelet conocido como "sombrero mexicano" [Torrence and Compo, 1998,Mi et al., 2005].

La transformada de Fourier de la función DOG (9) viene dada de acuerdo con [Torrence and Compo, 1998] por

$$\Psi(\omega) = \frac{i^m}{\sqrt{\Gamma(m+\frac{1}{2})}} (a\omega)^m e^{-(a\omega)^2/2} \tag{10}$$

2.4 Funciones wavelet escaladas

En la literatura sobre análisis de wavelet (veáse, por ejemplo, [Kumar and Foutoula-Georgiou, 1997, Lau and Weng, 1995, Maraun et al., 2007]), es común que las funciones wavelet estén escaladas de la siguiente forma

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-b}{a}), \quad a > 0$$
(11)



Figura 3: El wavelet de DOG con tres diferentes valores de m: 1, 2 y 4, respectivamente. El parámetro m controla la oscilación de esta función wavelet. Si m aumenta, entonces el número de oscilaciones del wavelet también aumenta.

donde ψ es la función wavelet, a es un parámetro de escala conocido como voice y b es un parámetro de localización temporal (traslación en el tiempo) [Kumar and Foutoula-Georgiou, 1997,Lau and Weng, 1995]. Nótese que si a > 1 tiene un efecto de dilación y si a < 1 entonces tiene un efecto de contracción.

Para el caso cuando la función wavelet es la de Morlet, también se expresa la relación 5 de la forma 11 [Maraun, 2006, Torrence and Compo, 1998]. Este caso es equivalente a ajustar la resolución temporal, esto es, el ancho de la función Gaussiana con respecto a la frecuencia analizada ($\omega' = \omega_0/\omega$), de tal modo que $a = 2\pi/\omega$ (se consideran escalas en lugar de frecuencias) y $\omega_o = 2\pi$ [Torrence and Compo, 1998], esto es

$$\psi_{b,a}(t) = \pi^{-1/4} e^{-i\omega_0(\frac{t-b}{a})} e^{-(t-b)^2/2a^2}$$
(12)

Por su parte la función de Paul escalada queda de la forma [Afifi et al., 2002]

$$\psi_{(b,a)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{2^m m! \left(1 - i\frac{t-b}{a}\right)^{-(m+1)}}{2\pi\sqrt{(2m)!/2}}$$
(13)

Finalmente la función escalada para la función DOG se obtiene de la misma manera que las dos anteriores, por lo cual no la presentaremos.

3. La transformada continua de wavelet

La transformada continua de wavelet para una serie temporal o señal f(t), en una localización temporal b y escala a, con respecto a una función wavelet $\psi_{b,a}(t)$, puede ser definida [Kumar and Foufoula-Georgiou, 1994] como una transformada integral, esto es

$$W_f(b,a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi_{b,a}^*(t)dt, \quad a > 0$$
(14)

donde $\psi_{b,a}^{*}(t)$ es la compleja conjugada de $\psi_{b,a}(t)$ [Kumar and Foufoula-Georgiou, 1994].

El nombre de continua deriva de que se asume que los parámetros $a \ y \ b$ toman valores continuos. Es por esta razón que las funciones wavelet utilizadas en la CWT no forman una base ortogonal. Por tanto, los coeficientes de la transformada wavelet en las escalas $a \ y$ las localizaciones temporales b, contienen información redundante y están correlacionados [Maraun and Kurths, 2004]. Desde un punto de vista práctico, los coeficientes de $W_f(b, a)$ representan la contribución de las escalas (los valores a) a la señal en diferentes instantes temporales (valores de b). Es posible considerar la transformada de wavelet como una correlación cruzada de una señal f(t) con un conjunto de funciones wavelet de varias escalas a centradas en diferentes instantes b [Cazelles et al., 2008]. Adicionalmente, la CWT puede considerarse como la convolución de f(t) con el conjunto de funciones wavelet $\psi_{b,a}$, *i. e.*, $W_f(b, a) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle$ [Torrence and Compo, 1998]. Una función f(t) puede ser reconstruida, teóricamente hablando, desde su transformada de wavelet por medio de una fórmula de inversión. La transformada inversa de wavelet $M_{\psi_{b,a}}$ para la función $W_f(b, a)$ (en este caso la transformada de wavelet) se puede expresar [Cazelles et al., 2008,Kumar and Foufoula-Georgiou, 1994] de la siguiente manera:

$$f(t) = M_{\psi_{b,a}} W_f(b,a)(t)$$
 (15)

$$= \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{a^2} W_f(b,a) \psi_{b,a}(t) dadb$$
(16)

donde $C_{\psi} = \int_0^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{f} df$, de tal modo que satisface la condición 3, y $\Psi(f)$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$. La transformada inversa de wavelet (relación 15) puede ser vista de dos formas diferentes. Como una forma de reconstrucción de f(t), una vez que se ha calculado su transformada de wavelet, o como una forma de expresar f(t) como una superposición de funciones (base) wavelet $\psi_{b,a}$, donde los coeficientes de esta superposición vienen dados por la transformada wavelet de f(t) [?]. Sin embargo, el hecho de aplicar la transformada de wavelet seguida de su inversa a una función arbitraria (serie temporal) f(t), no garantiza la reconstrucción de f(t), porque no toda función en $(0, \infty)$ es una transformación de wavelet. Adicionalmente, se debe tener especial cuidado con operaciones matemáticas que involucran una transformación bi-dimensional a uni-dimensional porque no siempre tiene porque tener una única posible transformación inversa [Maraun, 2006]. La transformada de wavelet cumple el teorema de Parseval [Kumar and Foufoula-Georgiou, 1994,Percival and Walden, 2006], preserva la energía o varianza de la señal, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{a^2} |W_f(b,a)|^2 dadb$$
(17)

Nótese que el primer lado de la ecuación 17 es utilizado para definir la energía (varianza) en la señal (serie temporal) si la señal está centrada (media cero). En el segundo lado, el término $\frac{W_f^2(b,a)}{a^2}$ define una función de densidad espectral que descompone la energía (varianza) en diferentes escalas *a* centradas en diferentes posiciones temporales *b* [Percival and Walden, 2006].

3.1 Consideraciones prácticas para calcular la CWT

En la práctica la CWT no se calcula directamente de la relación 14, aunque es posible por integración numérica, porque el tiempo de cómputo puede ser muy alto (el tiempo de integración en un intervalo $0 < a \leq I, 0 < b \leq J$ es IJ^2 [Meyers et al., 1993]). Por ello, una opción es utilizar el teorema de la convolución, calculando la CWT en el espacio espectral o de Fourier [Meyers et al., 1993,Torrence and Compo, 1998]. La versión discretizada de 14 para una serie temporal $f(t_n)$ de acuerdo con [Torrence and Compo, 1998], es

$$W_f^{\mathcal{F}}(a) = \sum_{n'=0}^{N-1} f(t_{n'}) \psi^*[\frac{(n'-n)\delta t}{a}]$$
(18)

donde ψ^* indica la compleja conjugada de ψ .

La transformada discreta de Fourier $f(\omega_k)$ de la serie temporal $f(t_n)$ viene dada por

$$\hat{f}(\omega_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i k n/N}$$
(19)

donde el índice k correspondiente a las frecuencias angulares ω_k viene dado por $k = 0, \dots, N-1$. Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de una función del tipo $\psi_{b,a}(t/a)$ viene dada por $\hat{\psi}_{b,a}(a\omega)$ y, por el teorema de la convolución [Torrence and Compo, 1998], la transformada de wavelet es la transformada inversa de Fourier del producto de las transformadas de Fourier

$$W_f^{\mathcal{F}}(a) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(\omega_k) \hat{\psi}^*(a\omega_k) e^{i\omega_k n\delta t}$$
(20)

donde N es el número de elementos de la serie temporal $f(t_n)$, δt es el intervalo temporal (constante para toda la serie temporal) y las frecuencias angulares ω_k vienen dadas [Torrence and Compo, 1998] por

$$\omega_k = \begin{cases} \frac{2\pi k}{N\delta t} & : \quad k \le \frac{N}{2} \\ -\frac{2\pi k}{N\delta t} & : \quad k > \frac{N}{2} \end{cases}$$
(21)

Utilizando la relación 20 y la transformada rápida de Fourier es posible calcular la transformada continua de wavelet para un conjunto de escalas a y tiempos b de un modo eficiente (el tiempo de cómputo se reduce a $IJ \log_2 J$ [Meyers et al., 1993]) [Torrence and Compo, 1998].

3.2 Normalización de la función wavelet

[Torrence and Compo, 1998] sugieren normalizar la función wavelet $\hat{\psi}_{b,a}(a\omega_k)$ para asegurar que la transformada de wavelet (relación 20) sea directamente comparable entre diferentes escalas a, y que también puedan ser comparables las transformadas wavelet de diferentes series temporales. Por ello, la función wavelet en cada escala a es normalizada de la siguiente manera para que tenga varianza o energía unidad

$$\hat{\psi}^{\mathcal{N}}(a\omega_k) = \left(\frac{2\pi a}{\delta t}\right)^{1/2} \hat{\psi}(a\omega_k) \tag{22}$$

Si se usa la relación ??, entonces la normalización de la función wavelet es

$$\psi\left[\frac{(n'-n)\delta t}{a}\right] = \sqrt{\frac{\delta t}{a}}\psi_0\left[\frac{(n'-n)\delta t}{a}\right]$$
(23)

donde ψ_0 está normalizada [Torrence and Compo, 1998]. Como una consecuencia de la normalización de la función wavelet, se tienen las siguientes propiedades matemáticas [Torrence and Compo, 1998]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\psi}(\omega') \right|^2 d\omega' = 1$$
(24)

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| \hat{\psi}^{\mathcal{N}}(a\omega_k) \right|^2 = N \tag{25}$$

donde N es el número de elementos de la serie temporal a estudio. Otro resultado de interés como consecuencia de la normalización es que la transformada de wavelet sólo dependerá de los "pesos" de las amplitudes de los coeficientes de la transformada de Fourier de f(t) [Torrence and Compo, 1998,Polanco-Martínez, 2012].

3.3 Sobre escalas, octavas y voices

Existen dos conceptos que están relacionados con el número de escalas a al calcular la CWT, *i. e.*, octavas y *voices*. La octava es el número de divisiones de la escala a y corresponde a potencias enteras de 2, mientras que el número de *voices* es el número de divisiones de una octava (también se puede considerar como el número de potencias no enteras de dos octavas consecutivas) [Percival andWalden, 2006]. En este apartado se presenta la forma como se escogen las escalas a. Como bien apunta [Farge, 1992] cuando se trabaja con wavelets ortogonales, el conjunto discreto de escalas a está limitado. Sin embargo para los wavelets continuos no hay un límite para el conjunto de escalas y pueden ser escogidas de modo arbitrario [Torrence and Compo, 1998]. Según [Torrence and Compo, 1998] el conjunto de las escalas viene dado por la siguiente relación

$$a_j = a_0 2^{j\delta_j}, \quad j = 0, 1, \cdots, J$$
 (26)

donde J determina el valor de la máxima escala¹, y viene dada por

$$J = \frac{\log_2(\frac{N\delta t}{a_0})}{\delta j} \tag{27}$$

donde δt es el espaciado temporal de los elementos de la serie temporal f(t), a_0 es la escala de menor resolución y debería de ser escogida de tal modo que el equivalente al periodo de Fourier. δj proporciona el espaciado entre las escalas a y su resolución dependerá de la función wavelet. Por ejemplo, para el wavelet de Morlet es alrededor de 0.5 [Torrence and Compo, 1998].

¹Nótese que la máxima escala podría "compararse" por analogía con la frecuencia de Nyquist, en el sentido de que calcular la CWT más allá de J no aporta más información incluso podría introducir falsa información espectral o artefactos.

3.4 Relación entre las escalas de wavelet y las frecuencias de Fourier

La relación entre la escala de wavelet y el "periodo equivalente de Fourier" (originalmente [Meyers et al., 1993] utilizó longitud de onda en lugar de frecuencias) puede, para algunas funciones wavelet, derivarse analíticamente sustituyendo la función $e^{i2\pi f_0 t}$ de frecuencia conocida f_0 ya sea en la relación 14 o en la ?? y calcular la escala *a* en la cual el poder espectral de wavelet tiene su máximo [Meyers et al., 1993, Torrence and Compo, 1998]. Para los casos de nuestro interés, *i.e.*, para el wavelet de Morlet y de acuerdo a [Torrence and Compo, 1998] la relación entre la frecuencia f y la escala *a* viene dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{4\pi a}{\omega_o + \sqrt{2 + \omega_o^2}} \tag{28}$$

A efectos prácticos se asume que $\omega_o = 2\pi$ [Maraun et al., 2007, Torrence and Compo, 1998], por tanto, 28 puede expresarse como

$$\frac{1}{f} \approx a \tag{29}$$

o de modo equivalente,

$$f \approx \frac{1}{a} \tag{30}$$

Este resultado simplifica mucho la interpretación del análisis de wavelet al utilizar la función de Morlet, porque es posible reemplazar escala por frecuencia [Torrence and Compo, 1998,Cazelles et al., 2008, Polanco-Martínez, 2012]. Por otro lado, las equivalencias entre las frecuencias y las escalas o periodos equivalente de Fouier para las funciones wavelet de Paul y de DOG de acuerdo con [Torrence and Compo, 1998], vienen dadas por las relaciones 31 y 32, esto es

$$\frac{1}{f} = \frac{4\pi a}{2m+1} \tag{31}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{2\pi a}{\sqrt{m + \frac{1}{2}}}\tag{32}$$

donde m indica el orden de la función de wavelet de Paul o de DOG.

3.5 El cono de influencia (COI)

La estimación del poder espectral por medio de la transformada continua de wavelet de una serie temporal no periódica puede generar errores (falsas estructuras espectrales), al principio y al final del espectro wavelet [Meyers et al., 1993]. La razón de estos artefactos se debe a que la relación [Torrence and Compo, 1998] hace uso de la transformada de Fourier, la cual asume periodicidad en los datos bajo análisis [Meyers et al., 1993]. Hay varias formas de manejar este problema. Por ejemplo, [Meyers et al., 1993] proponen aplicar una función de atenuación de tipo coseno a los datos. Otra opción es hacer un *padding* (rellenar con ceros) a cada lado de la serie temporal, después estimar el espectro wavelet y por último, eliminar la parte del espectro afectada por los ceros de los segmentos añadidos [Meyers et al., 1993,Torrence and Compo, 1998]. Uno de los inconvenientes al aplicar el cero *padding* es que produce discontinuidades en los bordes del espectro wavelet.

La región del espectro wavelet en la cual los efectos de los bordes llegan a ser importantes es conocida como el cono de influencia (COI, cone of influence) [Torrence and Compo, 1998]. [Torrence and Compo, 1998] definen al COI como el *e-folding time* para la autocorrelación del espectro wavelet en cada escala. El *e-folding time* (tiene un valor de $\sqrt{2a}$ para el wavelet de Morlet y de DOG y de $a/\sqrt{2}$ para el wavelet de Paul) es seleccionado de modo que el espectro wavelet para una discontinuidad en los bordes, decrezca por un factor de e^{-2} . Las porciones del espectro wavelet entre el eje del tiempo y el COI deberían considerarse poco fiables debido a que las pruebas de significación estadística no serán confiables dentro del COI Torrence and Compo, 1998, Grinsted et al., 2004]. Más recientemente se han propuesto algunos otros métodos para enfrentar el problema de los bordes al estimar el espectro. Por ejemplo, [Zhang and Moore, 2011] proponen un nuevo método que mejora las pruebas de significación estadística del espectro wavelet cerca de los límites de los datos. Sin embargo, aunque el método es prometedor, hasta la fecha no ha sido usado extensivamente.

4. La estimación del espectro

4.1 La estimación del espectro univariado

Por analogía al análisis espectral de Fourier (vía el periodograma) se puede definir [Cazelles et al., 2008] el espectro local de wavelet como el módulo al cuadrado de la CWT (relación ??) de una serie temporal f(t), esto es

$$S_f(b,a) = \|W_f^F(b,a)\|^2$$
(33)

La relación 33, conocida como el escalograma [Kumar and Foutoula-Georgiou, 1997], estima la distribución de la varianza de una serie temporal f(t) entre las escalas a y diferentes localizaciones temporales b [Cazelles et al., 2008]. Sin embargo, y al igual que el periodograma, no es un estimador consistente del espectro [Percival and Walden, 2006,Maraun et al., 2007]. Como una forma de obtener un estimador más robusto del espectro, [Torrence and Compo, 1998] proponen suavizar el escalograma promediando sobre todos los espectros wavelet locales, variando el parámetro de localización temporal b. Entonces, lo que se obtiene es el espectro wavelet global, utilizando la nomenclatura de [Cazelles et al., 2008], es igual a

$$\overline{S}_f(a) = \frac{\sigma_f^2}{T} \int_0^T \|S_f(b,a)\|^2 db$$
(34)

Este espectro wavelet global puede ser comparado al clásico espectro de Fourier (una comparación entre el espectro de Fourier y el espectro de wavelet puede encontrarse en [Perrier et al., 1995]), y [Percival, 1995] y [Torrence and Compo, 1998] sugieren que es un estimador consistente del espectro. Del mismo modo es posible obtener una varianza promedio en cada localización temporal promediando sobre un rango de escalas (banda, en la jerga del análisis de señales), esto es

$$\overline{S}_f(b) = \frac{\sigma_f^2 \pi^{1/4} \sqrt{b}}{C_\psi} \int_0^\infty \sqrt{a} \|S_f(b,a)\|^2 da$$
(35)

donde σ_f^2 es la varianza de la serie temporal f(t) y C_{ψ} ha sido definido en la relación 16. Nótese como la relación 35 puede ser utilizada como un filtro paso banda (esta propiedad puede ser de ayuda para explorar posibles modulaciones de una frecuencia por otra en una serie temporal, o modulaciones de una serie temporal por otra serie [Torrence and Compo, 1998]), teniendo en cuenta la relación 30, para una banda de frecuencia $f_1 - f_2$ [Torrence and Compo, 1998, Cazelles et al., 2008, Polanco-Martínez, 2012]. Como consecuencia de promediar, en escala (periodo) o en tiempo, se produce sesgo en el espectro wavelet [Maraun et al., 2007]. Para minimizar este sesgo, [Maraun et al., 2007] proponen promediar la misma cantidad de información independiente en cada escala *a*, para ello escogen la longitud promedio del *reproducing kernel* de Morlet como una ventana de suavizado \mathcal{W} (Figura 4). Nótese la analogía con el suavizado del espectro de Fourier por medio de ventanas (cómo el método WOSA – Welch overlapped segment averaging [Polanco-Martínez and Faria, 2018, Percival and Walden, 2006]. El proceso se resume a continuación [Maraun, 2006, Maraun et al., 2007]. Por un lado, el promediado en la dirección de las escalas debe realizarse con una ventana de suavizado de longitud constante \mathcal{W}_a para escalas logarítmicas (Figura 4). \mathcal{W}_a denota la anchura de la ventana mitad en la misma unidad como el número de voices por octavas (N_{voice}). Por otro lado, el promediado en la dirección del tiempo se realiza utilizando una ventana que tenga longitud proporcional a la escala (Figura 4). Esto es, $a\mathcal{W}_b$ denota la anchura de la ventana mitad en unidades de tiempo.



Figura 4: Esquema que muestra el proceso de suavizado utilizando el *reproducing kernel.* a) En la dirección de escala. b) En la dirección del tiempo. Tomada y modificada de [Maraun et al., 2007].

En resumen, las relaciones 34 y 35, utilizando el método de suavizado de [Maraun et al., 2007], pueden ser expresadas como

$$\overline{S}_f(b,a) = \mathcal{W}(\|S_f(b,a)\|^2) \tag{36}$$

donde \mathcal{W} es el operador de suavizado.

4.2 Sobre la normalización del espectro wavelet

Existen diferentes tipos de normalización para el espectro wavelet, pero quizá, la más conocida, por su utilidad en ciencias ambientales es la de [Torrence and Compo, 1998], y en menor medida la de [Kaiser, 1994]. Por un lado, la normalización $(\sqrt{\frac{\delta t}{a}})$ sugerida por los primeros, tiene la ventaja de que al calcular el espectro wavelet para ruido blanco Gaussiano, se obtiene un espectro plano (como debería esperarse). Sin embargo, si se calcula el espectro wavelet para varias funciones sinusoidales de igual amplitud, el poder espectral difiere para cada periodo (escalas de oscilación) de los sinusoides (Figura 5). Por otro lado, la normalización de Kaiser ($\sqrt{\delta t}$) no permite que el espectro wavelet de un ruido blanco Gaussiano tenga un comportamiento plano (de hecho tiene un comportamiento del tipo $\sim \frac{1}{a}$). Sin embargo, se conserva el poder espectral en los periodos (escalas de oscilación) correspondientes a los sinusoides (Figura 5) [Maraun and Kurths, 2004].

Esta situación, parece un problema serio, sobre todo cuando se sigue la normalización de Torrence y Compo, porque el poder espectral en las altas o largas escalas (o bajas frecuencias) está sobrestimado y podría llevar a errores de interpretación. Sin embargo, al aplicar un test de significación se consideran los efectos de la normalización pero aun así los picos espectrales de diferentes escalas no son comparables entre sí [Maraun and Kurths, 2004, Liu et al., 2007]. Por esta razón, [Liu et al., 2007] desarrollaron un método para corregir este sesgo. Siguiendo una definición de energía físicamente coherente para el espectro wavelet llegaron a la conclusión de que los coeficientes de transformación al cuadrado deberían de ser divididos por las escalas que asocian. Con este simple ajuste el espectro wavelet mejora substancialmente y permite una comparación de los picos espectrales de diversas escalas [Liu et al., 2007].

4.3 La estimación del espectro bi-variado

De igual manera que en el análisis espectral de Fourier, en al análisis espectral basado en wavelets, es posible realizar análisis de wavelet cruzado (CWA, *Cross wavelet Analysis*). El espectro cruzado de wavelet para dos series temporales f(t) y g(t) se define como el valor esperado (E) del producto de los espectros de wavelet $W_f(b, a)$ y $W_g(b, a)$ de las series [Maraun and Kurths, 2004], esto es

$$WCS_{fq}(b,a) = E[W_f(b,a)W_q^*(b,a)]$$
 (37)

donde $W_g^*(b, a)$ es la compleja conjugada de $W_g(b, a)$. Para obtener el espectro cruzado en el sentido de obtener las amplitudes espectrales cruzadas de f(t) y g(t) hay que calcular el módulo



Figura 5: Espectro wavelet global para ruido blanco Gaussiano y para dos sinusoides de igual amplitud y de frecuencias 1/2 y 1/4. En el espectro con la línea sólida se ha utilizado la normalización de [Torrence and Compo, 1998]. En el espectro con la línea punteada utiliza la normalización de [Kaiser, 1994]. Tomada y modificada de [Maraun and Kurths, 2004].

de $WCS_{fg}(b, a)$. Otra forma de expresar 37, descomponiendo en amplitud y fase [Maraun and Kurths, 2004], es

$$WCS_{fg}(b,a) = \|WCS_{fg}(b,a)\| e^{i\phi\{WCS_{fg}(b,a)\}}$$
(38)

donde la fase $\phi\{WCS_{fg}(b,a)\}$ describe el retraso entre las dos series temporales en la escala *a* y en torno al instante de tiempo *b* [Grinsted et al., 2004, Maraun and Kurths, 2004]. Es importante tener cuidado con el espectro cruzado de wavelet, porque no parece ser adecuado al aplicar un

test de significación para el análisis de la interrelación entre dos procesos o señales a estudio [Torrence and Webster, 1999, Grinsted et al., 2004]. Por tanto, es necesaria una normalización [Maraun and Kurths, 2004, Maraun et al., 2007, Polanco et al., 2011, Polanco-Martínez, 2019]. La normalización del espectro cruzado es conocida como la coherencia normalizada de wavelet o simplemente como coherencia de wavelet (*wavelet coherence*) (WCO), y se define como [Maraun and Kurths, 2004]

$$WCO_{fg}(b,a) = \frac{\|\langle WCS_{fg}(b,a)\rangle\|}{\|\langle W_f(b,a)\rangle\|^{1/2}\|\langle W_g(b,a)\rangle\|^{1/2}}$$
(39)

donde $\langle \rangle$ denota obligatoriamente un operador de suavizado, tanto para escala como para tiempo [Maraun and Kurths, 2004]. Entonces, $WCO_{fg}(b, a)$ está definido entre 0 y 1. La WCO proporciona información sobre la variabilidad común para cada instante de tiempo y escala entre dos series temporales f(t) y g(t). Un valor de 1 indica una variabilidad igual entre f(t) y g(t)para una determinada escala a y tiempo b. Un valor menor que uno, para una cierta escala ay tiempo b, puede indicar que la variabilidad de ambas series no es análoga. Un valor de cero indica que no hay correlación entre las series para una cierta escala a y en torno al instante de tiempo b [Cazelles et al., 2008, Maraun and Kurths, 2004]. Para obtener información de un posible retraso o adelanto entre dos series temporales para una determinada escala a y tiempo b, se calcula la fase de la coherencia de wavelet (también conocida como la diferencia de fase) entre f y g [Polanco-Martínez, 2012, Polanco-Martínez, 2019], esto es

$$\phi_{f,g}(b,a) = \tan^{-1} \frac{I(\langle WCS_{fg}(b,a) \rangle)}{R(\langle WCS_{fg}(b,a) \rangle)}$$
(40)

Los valores $\phi_{f,g}(b, a)$ estiman la diferencia de fase de dos series temporales para una escala a y tiempo b (Figura 6). Un valor positivo $(0 < \phi_{f,g}(b, a) < \pi/2)$ indica un adelanto de f(t) respecto de g(t), mientras que un valor negativo $(-\pi/2 < \phi_{f,g}(b, a) < 0$ indica un retraso de f(t) con respecto a g(t). Un valor de $\phi_{f,g}(b, a) = 0$ implica que, para una determinada escala a y tiempo b, hay una función wavelet que ajusta de la misma manera para ambas series temporales. Por otro lado, si $\phi_{f,g}(b, a) = \pm \pi/2$ implica que, para una determinada escala a y tiempo b, aparece el máximo retraso (-) o adelanto (+) de f(t) con respecto a g(t) [Lane, 2007, Polanco-Martínez, 2012, Polanco-Martínez, 2019]. Por otro lado, para calcular el tiempo de retraso o adelanto $t_{lag}(a)$ se puede utilizar [Maraun and Kurths, 2004, Maraun et al., 2007] la siguiente relación

$$t_{lag}(a) = \frac{a\phi_{f,g}(b,a)}{2\pi} \tag{41}$$



Figura 6: Circulo de la fase de la coherencia de wavelet (WPH) (tomado y modifcado de [Polanco-Martínez, 2019]).

Adicionalmente, se puede calcular la distribución de las fases para un rango de escalas (o periodos) a. Una distribución uni-modal indica que hay un valor preferido de $\phi_{f,g}(b,a)$, por ello hay una tendencia estadística de que las dos series temporales f(t) y g(t) estén en fase. Por lo contrario, si la distribución es uniforme no es evidente una asociación entre la fase de f(t) y g(t)[Cazelles et al., 2008]. De la misma manera que con el espectro wavelet uni-variado el espectro para el caso bi-variado también presenta un tipo de sesgo debido a como se normaliza el espectro [Veleda et al., 2012]. Por esta razón, [Veleda et al., 2012] introdujeron un método para corregir este sesgo tanto para la correlación cruzada de wavelet como para la coherencia de wavelet (una descripción a detalle puede encontrarse en esa referencia).

5. Pruebas de significación estadística

5.1 Caso uni-variado

[Torrence and Compo, 1998] propusieron una prueba de significación estadística para las estimaciones espectrales vía la CWT para el caso uni-variado mediante simulaciones de Monte-Carlo. Ellos utilizaron un espectro de fondo rojo (relación 42) para establecer una hipótesis nula H_o , la cual se define de la siguiente manera [Torrence and Compo, 1998]. Se asume que la serie temporal a estudio tiene un espectro promedio dado por la relación 42. Si un punto escala-tiempo (a, b) del espectro wavelet está por encima del espectro de fondo, entonces ese punto puede ser considerado significativo con un cierto porcentaje de confianza (a este tipo de prueba se le conoce como *pointwise test*). Como modelo de ruido rojo, [Torrence and Compo, 1998] utilizan un proceso estocástico Autoregresivo de orden 1 (AR1) con tiempos equidistantes (relación 42). El *pointwise test* [Maraun et al., 2007,Torrence and Compo, 1998] se resume en los siguientes pasos.

- 1. Se escoge un nivel de significación α (p. ej. del 0.95).
- 2. Se ajusta² k-modelos AR1 (relación 42) a la serie temporal bajo estudio $f(t_i)$, con $i = 1, \ldots, N$ (número de elementos). Donde k toma un valor de al menos 1000.

²[?] en su metodología utilizan directamente la relación 42. También es posible utilizar técnicas de *bootstrap*, utilizando como modelo de réplicas un proceso AR1 (con las mismas propiedades estadísticas que la serie a estudio). El valor esperado del espectro wavelet de k realizaciones AR1 converge a la relación 42.

El modelo AR1 viene definido [Zwiers and Von Storch, 2004] por la relación

$$R(t_i) = \mathcal{E}_{N(0,1)} \text{ para } i = 1$$

$$R(t_i) = \rho_1 r(t_{i-1}) + \mathcal{E}_{N(0,\rho_{\mathcal{E}})}(t_i) \text{ para } r = 2, \dots, N$$

$$(42)$$

donde $\rho_{\mathcal{E}} = \sqrt{\sigma_g^2(1-\rho_1^2)}, \sigma_g^2$ es la varianza de $f(t_i)$ y ρ_1 es el coeficiente de autocorrelación *lag-1* de $f(t_i)$.

- 3. Se estima el percentil 0.95, $W_{q95}(b, a)$, del ensemble de k espectros wavelet AR1 por medio de simulaciones de Monte-Carlo.
- 4. Se verifica para cada punto de $W_g(b, a)$ si superan el $W_{q95}(b, a)$. El conjunto de todos estos puntos escala-tiempo (a, b) del espectro wavelet se consideran estadísticamente significativos y vienen dados [Grinsted et al., 2004, Maraun et al., 2007] por

$$P_{pw} = \{(b,a) | W_q(b,a) > W_{q95}(b,a)\}$$
(43)

Es cierto que las pruebas de significación (tipo *pointwise*) son relativamente fáciles de implementar computacionalmente, también es cierto que estos tests traen asociado el problema de la multiplicidad o comparaciones múltiples (inflación del error tipo I) [Maraun et al., 2007, Polanco-Martínez, 2019, Polanco-Martínez, 2020]. Por ejemplo, para un nivel de significación de 0.95, un test aplicado para K espectros wavelet $W_f(b, a)$ en una determinada escala a y tiempo b, implica un 5%K de falsos positivos. Una solución clásica al problema de la multiplicidad es la aplicación de las correcciones de Bonferroni, Sidak o Benjamini y Hochberg (BH), entre otros Polanco-Martínez, 2019, Polanco-Martínez, 2020. Sin embargo, para el caso de la estimación espectral vía wavelet existe un problema adicional. Los coeficientes de la CWT, para diferentes escalas a y tiempos b, están correlacionados. Como consecuencia, los falsos positivos siempre ocurren como "parches" contiguos (estos parches o áreas espectrales espurias reflejan oscilaciones aleatoriamente estables para un periodo corto de tiempo) [Maraun, 2006, Maraun et al., 2007, Schulte et al., 2015, Schulte, 2016a]. Para resolver este inconveniente, [Maraun et al., 2007] desarrollaron (probablemente por primera vez) un test del tipo *areawise* que utiliza información sobre el tamaño y la geometría de las áreas espectrales para discernir si es o no un área estadísticamente significativa. Sin embargo, no siempre es posible aplicar este test porque es necesario una cierta cantidad de elementos de la serie temporal a estudio y sólo se puede obtener el test con un nivel del 90% de confianza. Por ejemplo, en el caso de estudio de este trabajo (veáse sección 6), las series temporales a estudio contienen pocos elementos (N=228), por lo cual no es posible aplicar este test. Sin embargo, en la sección 7 si se ejemplifica el uso del test areawise. Una descripción e implementación de los últimos avances de los test tipo *areawise* aplicables al estimar la significación estadística para el espectro wavelet (casos uni- y bi-variante) puede ser consultados en [Schulte et al., 2015, Schulte, 2016a, Schulte, 2016b, Schulte, 2019, Schulte, 2020].

5.2 Caso bi-variado

La primera prueba de significación estadística del tipo *pointwise* para la coherencia de wavelet (WCO) fue desarrollada por [Torrence and Webster, 1999]. Esta prueba fue relizada mediante simulaciones de Monte-Carlo y el uso de subrogados (series temporales sintéticas con conocidas características estadísticas) debido a que no es posible desarrollar una prueba analítica. Ellos proponen utilizar 10,000 conjuntos de series temporales de ruido blanco y con el mismo número de elementos que las series a estudio. A partir de este novedoso trabajo se han realizado algunas mejoras a esta prueba de significación estadística aunque siempre conservando su esencia original. Por ejemplo, el uso de subrogados que contienen autocorrelación, como las series AR1, los

cuales son más realistas que las series de ruido blanco en el estudio y análisis de fenómenos ambientales [Hasselmann, 1976, Grinsted et al., 2004, Vasseur and Yodzis, 2004, Polanco et al., 2011]. Algunas de estas implementaciones estadístico-computacionales más conocidas a día de hoy que mejoran el método de [Torrence and Webster, 1999] son los trabajos de [Maraun and Kurths, 2004, Maraun et al., 2007], [Grinsted et al., 2004], [Cazelles et al., 2008] y [Aguiar-Conraria et al., 2008]. El test de significación de tipo *pointwise* para la WCO se describe a continuación [Torrence and Webster, 1999, Maraun and Kurths, 2004, Maraun et al., 2007]. Considerando las longitudes o número de elementos de las series temporales a estudio, se ha utilizado el espectro correspondiente a un proceso AR1 como uno contra el cual la hipótesis nula ('H0: los procesos no son coherentes') es contrastada. El test de significación es calculado como sigue: se escoge un nivel de confianza $1 - \alpha$. Se calculan las coherencias (WCO) correspondientes a varios procesos AR1 con la misma autocorrelación de las series temporales a estudio y, por medio de simulaciones de Monte-Carlo, se estiman los valores críticos correspondientes al n-ésimo nivel de confianza $(1 - \alpha)$. Cada punto del dominio tiempo-escala es verificado, comprobando si el espectro estimado de las series temporales excede los correspondientes valores críticos aleatorios. El test propuesto por [Torrence and Webster, 1999, Maraun and Kurths, 2004, Maraun et al., 2007] se resume en los siguientes pasos:

- 1. Se escoge un nivel de significación α (p. ej. del 0.95).
- 2. Se calcula la WCO para las series temporales bajo estudio $f(t_i) \ge g(t_i)$, con i = 1, ..., N (número de elementos).
- 3. Se ajustan k modelos AR1 (relación 42) a cada una de las series temporales bajo estudio $f(t_i) \ge g(t_i)$, teniendo en cuenta la autocorrelación de cada una de éstas series a estudio. Donde k toma un valor de al menos 1000.
- 4. Se estima el percentil 0.95, $WCO_q95(b, a)$, del ensemble de los k-coherencias de wavelet calculadas para los surrogados mediante simulaciones de Monte-Carlo y se estiman los valores críticos correspondientes al n-ésimo nivel de confianza.
- 5. Se verifica para cada punto del dominio para determinar cuales puntos de las coherencias wavelet de las series a estudio superan los valores críticos, *i.e.*:

$$P_{wco} = \{(b,a) | WCO_{fq}(b,a) > WCO_{q95}(b,a) \}$$
(44)

Por otro lado, [Maraun and Kurths, 2004] dedujeron una aproximación analítica para ahorrar tiempo de cómputo al estimar los valores críticos mediante simulaciones de Monte-Carlo. En principio esta aproximación puede utilizarse si al menos una de las dos series temporales a estudio puede ser modelada aproximadamente como ruido blanco Gaussiano y el número de elementos de las series es grande [Maraun and Kurths, 2004, Polanco-Martínez, 2019]. Sin embargo, un poco más reciente, Maraun³ comentó que ésta aproximación puede ser utilizada en todos los casos, debido a que la dependencia de los valores críticos de dos procesos bajo a estudio es muy débil. La relación es la siguiente:

$$WCO_{95} = 8,23 \times 10^{-5} \omega_0^3 + 4,24 \times 10^{-5} \omega_0^2 \omega + 1,13 \times 10^{-5} \omega_0 \omega^2 + 1,54 \times 10^{-5} \omega^3 - 2,30 \times 10^{-3} \omega_0^2 - 2,19 \times 10^{-3} \omega_0 \omega$$
(45)
-7,51 × 10⁻⁴ \omega^2 + 2,05 × 10⁻² \omega_0 + 1,27 × 10⁻² \omega + 0,95

³https://tocsy.pik-potsdam.de/wavelets/faq.html

donde $3 \leq \omega_o \leq 12$ (la frecuencia central) y $0 \leq \omega \leq 25$ (la longitud de la función o ventana de suavizado en la dirección de la escala), lo cual implica que esta aproximación es sólo válida para esos intervalos. La razón de porque sólo la escala es usada en la relación 45 es debido a que el suavizado en la dirección del tiempo es prácticamente inefectiva [Maraun and Kurths, 2004, Polanco-Martínez, 2019]. De la misma manera que en la estimación del espectro wavelet del caso uni-variado, el problema de la multiplicidad al estimar la significación estadística de la coherencia de wavelet también está presente. Para ello, [Maraun and Kurths, 2004] desarrollaron un *areawise* test para solventar este problema, este test está incluido en el paquete computacional SOWAS [Maraun, 2021].

6. Aplicaciones

Para ejemplicar la estimación del espectro (casos uni- y bi-variado) wavelet obtenido mediante la transformada continua de wavelet y tres funciones de wavelet (Morlet, Paul y DOG). Por un lado, se utilizan datos mensuales de capturas por unidad de esfuerzo (CPUE, Catch Per Unit of Effort) de pulpo común (Octopus vulgaris) obtenidas en las Islas Canarias para el periodo 1989–2007 (Figura 7, en negro) [Caballero-Alfonso et al., 2010, Polanco et al., 2011, Polanco-Martínez, 2012]. Por otro lado, se usan datos mensuales del índice de la oscilación del Atlántico Norte (NAO, North Atlantic Oscillation) (Figura 7, en azúl) [NOAA, 2021, Hurrell et al., 2003]. La NAO es una de las principales y recurrentes características de la variabilidad climática de medias y altas latitudes en el Hemisferio Norte, de modo especial durante los meses de las estaciones frías. Esta oscilación produce grandes cambios en la velocidad y dirección media del viento sobre el Atlántico, en el transporte de humedad y calor entre el Atlántico y los continentes cercanos, y en la intensidad y el número de tormentas y sus trayectorias [Hurrell et al., 2003, Polanco-Martínez, 2012]. En estudios previos hemos demostrado que existe una fuerte relación entre la NAO y las CPUE del pulpo común de las Islas Canarias, incluso mucho más marcado que entre estas capturas y las temperaturas superficiales del océano (una variable climática intimamente relacionada con las capturas y la ecología del pulpo común) [Caballero-Alfonso et al., 2010, Polanco et al., 2011, Polanco-Martínez, 2012, Polanco-Martínez and López-Martínez, 2021]. Las Figuras 8 y 9 muestran los espectros wavelet uni-variados para las capturas de pulpo común y para la NAO utilizando tres tipos diferentes de funciones wavelet: Morlet (arriba), Paul (centro) y DOG (*Derivative of a Gaussian*) (abajo). Es altamente recomendable usar al menos dos diferentes funciones wavelet al estimar el espectro de una señal o serie temporal debido a que uno de los puntos sensibles del análisis espectral de wavelet es que los espectros estimados mediante esta técnica son altamente dependientes de la función wavelet utilizada [Mi et al., 2005, Percival and Walden, 2006]. Por esta razón en este ejemplo se utilizan tres funciones wavelet para estimar el espectro, dos complejas (Morlet y Paul) y otra real (DOG). Se puede observar (Figuras 8 y 9) que al menos la variabilidad intra-anual en las escalas (periodos) cortas (menos de un año) de los tres espectros y para las dos series temporales es relativamente parecida, algo que es mucho más marcado en el espectro wavelet de Morlet (arriba) y de Paul (centro). Las diferencias entre los espectros DOG (abajo) y los otros dos espectros, tanto para las capturas como para la NAO, se debe principalmente a que la función DOG permite estimar el espectro hasta muy largas escalas o periodos (poco más de 20 años en este caso), lo cual es un resultado al transformas las frecuencias de Fourier a escalas (véase subsección 3.4 y de manera particular las relaciones 28, 31, 31), mientras que con Morlet y Paul sólo llegan hasta los 7 y 9 años, respectivamente. Sin embargo, hay que tener cuidado con los espectros wavelet obtenidos con la función DOG debido a que los máximas periodos de estos espectros se aproximan al número de años (21) de las series analizadas.



Figura 7: Valores mensuales de capturas por unidad de esfuerzo (CPUE) de pulpo común [Caballero-Alfonso et al., 2010,Polanco et al., 2011, Polanco-Martínez, 2012] e índice mensual de la oscilación del Atlántico Norte (NAO) [NOAA, 2021]. Los datos cubren el intervalo 1989–2009 (N=240 elementos).

Por otro lado, la variabilidad inter-anual, i.e., la que está comprendida entre los periodos de 1 año y hasta 3/4 años, presenta altos valores en las amplitudes espectrales (en rojo) en ambas series analizadas, aunque para el caso de los espectros con Morlet y Paul no son estadísticamente significativos, al menos con una confianza del 95% pero en ciertos casos si lo son pero con una confianza del 90% (ver Figuras 10 y 11). Es bien sabido que el índice NOA tiene su máxima variabilidad espectral entre los 2 y los 3 años [Stephenson et al., 2000, Hurrell et al., 2003, y aunque los espectros wavelet presentan altos valores en sus correspondientes amplitudes no siempre superan el test de significanción estadística. Esto podría deberse a que el ruido de fondo utilizado en las pruebas de significanción estadística asumen un ruido de tipo rojo, y hasta donde se sabe, no está del todo claro el tipo de ruido de fondo de la oscilación del Atlántico Norte [Stephenson et al., 2000, Fernández et al., 2003, Mills, 2004]. Para concluir este ejemplo se presenta la correlación wavelet, medida como la coherencia normalizada de wavelet, entre el índice NAO y las capturas (Figuras 12 y 13). El resultado más relevante es la estructura de correlación con alto poder espectral y estadísticamente significativa (90% y 95% de confianza) y en fase (las pequeñas flechas apuntan principalmente hacia la derecha) que se encuentra localizada en los periodos de entre 2 y 4 años y entre los años 1992/1993 y 2003/2004. Esta estructura espectral se encuentra en las tres coherencias de wavelet estimadas mediante las tres funciones de wavelet utilizadas (Morlet, Paul y DOG), con muy pocas diferencias. Esto indica la posible existencia de una relación entre la NAO y las capturas de pulpo común de las Islas Canarias durante el periodo 1992–2004. Esto es algo que ha sido demostrado previamente [Caballero-Alfonso et al., 2010, Polanco et al., 2011, Polanco-Martínez, 2012] utilizando también la coherencia normalizada de wavelet la cual fue también estimada con la función de Morlet pero con un algoritmo ligeramente diferente [Maraun and Kurths, 2004], y más recientemente, [Polanco-Martínez and López-Martínez, 2021] utilizaron una técnica estadística independiente (la correlación por ventanas móviles) y se corrobora esta relación entre la NOA y las capturas de pulpo común en las Islas Canarias al menos durante el periodo 1993-2003. Finalmente podeomos ver como la función Morlet tiene ciertos límites (es más conservadora en términos de escalas) impuestos por el COI, por lo cual no permite inferir información espectral más allá de los 4/5 años, algo que las funciones Paul y DOG si permiten hacerlo.



Figura 8: Espectros wavelets estimados mediante las funciones de Morlet (arriba), Paul (centro) y DOG (abajo) para las CPUE. El área ensombrecida en blanco indica el cono de influencia (COI) y es la región del espectro wavelet en la cual los efectos de los bordes llegan a ser importantes. Los contornos en negro son las regiones que superan el test de significación estadística (> 95 % de confianza).



Figura 9: Espectros wavelets estimados mediante las funciones de Morlet (arriba), Paul (centro) y DOG (abajo) para la NAO. El área ensombrecida en blanco indica el cono de influencia (COI) y es la región del espectro wavelet en la cual los efectos de los bordes llegan a ser importantes. Los contornos en negro son las regiones que superan el test de significación estadística (> 95 % de confianza).



Figura 10: Espectros wavelets estimados mediante las funciones de Morlet (arriba), Paul (centro) y DOG (abajo) para las CPUE. El área ensombrecida en blanco indica el cono de influencia (COI) y es la región del espectro wavelet en la cual los efectos de los bordes llegan a ser importantes. Los contornos en negro son las regiones que superan el test de significación estadística (> 90 % de confianza).



Figura 11: Espectros wavelets estimados mediante las funciones de Morlet (arriba), Paul (centro) y DOG (abajo) para la NAO. El área ensombrecida en blanco indica el cono de influencia (COI) y es la región del espectro wavelet en la cual los efectos de los bordes llegan a ser importantes. Los contornos en negro son las regiones que superan el test de significación estadística (> 90 % de confianza).



Figura 12: Coherencias de wavelet estimadas utilizando las funciones de Morlet (arriba), Paul (centro) y DOG (abajo) entre la NAO y las CPUE. El área ensombrecida en blanco indica el cono de influencia (COI) y es la región del espectro wavelet en la cual los efectos de los bordes llegan a ser importantes. Los contornos en negro son las regiones que superan el test de significación estadística (> 95 % de confianza).



Figura 13: Coherencias de wavelet estimadas utilizando las funciones de Morlet (arriba), Paul (centro) y DOG (abajo) entre la NAO y las CPUE. El área ensombrecida en blanco indica el cono de influencia (COI) y es la región del espectro wavelet en la cual los efectos de los bordes llegan a ser importantes. Los contornos en negro son las regiones que superan el test de significación estadística (> 90% de confianza).

7. Paquetes computacionales para realizar análisis espectral de wavelet

En esta sección se presenta de manera concisa los principales paquetes computacionales libremente distribuidos (de tipo software libre, código abierto o al menos de libre acceso pero con acceso al código fuente) para realizar análisis espectral de wavelet vía la transformada continua de wavelet para los casos uni- y bi-variado. Se presentan las principales ventajas y desventajas de cada paquete y su uso básico. Para información más detallada se proporcionan las referencias de cada paquete.

7.1 Torrence & Compo

El primer software para realizar análisis espectral de wavelet fue desarrollado por [Torrence and Compo, 1998] hace más de 20 años (véase https://atoc.colorado.edu/research/wavelets/). Ellos proporcionaron la codificación de esta herramienta originalmente escrita en Fotran 77. La razón de porque Torrence & Compo usaron originalmente Fortran es que hace más de 20 años Fortran era – y aun sigue siendo en ciertas áreas de las ciencias e ingeniería – muy popular para aplicaciones numéricas y, por otro lado, los autores trabajan en el área de las ciencias del clima y Fortran era, es y sigue siendo muy usado en ese campo. Un poco después en IDL y Matlab, y un poco más reciente (2014) en Python (aunque la codificación en este lenguaje fue realizado por Evgeniya Predybaylo). El código fuente en estos cuatro lenguajes se encuentra disponible

en GitHub⁴. A pesar de que estos desarrollos computacionales llevan más de 20 años aun se mantienen actualizados, al menos hasta diciembre de 2021, y dado que el código fuente está disponible, garantiza hasta cierto punto una larga vida a estas implementaciones. La principal ventaja de este implementación computacional, a aparte de la versatilidad de que está codificado en varios lenguajes de programación -y a pesar de que un par de estos lenguajes lo son con licenciamiento comercial y privativo, esto es, debes de tener una licencia para usar tanto Matlab como IDL – es que es posible usar tres tipos de funciones wavelet para estimar tanto el espectro uni-bariado como el bi-variado: Morlet, Paul y DOG. En contrapartida, su principal desventaja es que no contemplan las correcciones debido al sesgo existente tanto en el espectro wavelet [Liu et al., 2007] como en la coherencia de wavelet [Veleda et al., 2012]. El uso de estas implementaciones es relativamente sencillo, en particular para las implementaciones en Matlab, IDL y Python. Sin embargo, para el caso de la implementación en Fortran, si bien es cierto que en el caso de series temporales con un gran número de elementos sera más rápido que los otros tres lenguajes, pero se requiere cierta experiencia en el uso de lenguajes compilados y de un software externo para graficar los resultados. Desafortunadamente esto está más allá del objetivo de este artículo de revisión. En la Figura 14 se reproduce la Figura 1 de [Torrence and Compo, 1998], esto es, se presenta el espectro wavelet (vía Morlet y DOG) de el Niño región 3 (NINO3) en términos de anomaliás de temperaturas superficiales del océano (SST) [Kaplan et al., 1998]. Se ha utilizado el código en Python anteriormente mencionado y que está disponible en https://github.com/chris-torrence/wavelets/tree/master/wave_python aunque hemos modificado ligeramente el código para adaptarlo a nuestras necesidades. Los datos cubren el periodo desde el año 1871 a 1996 con una frecuencia de tres datos por año. Como se pueda apreciar la principal característica del espectro wavelet de el NINO3-SST, son los altos valores del espectro en la banda ("periodo") de entre 2 y 5 años, la cual coincide con la conocida firma espectral de el Niño, tal como apunta [Torrence and Compo, 1998].

 $^{^{4}}$ https://github.com/chris-torrence/wavelets



Figura 14: Coherencias de wavelet estimadas utilizando las funciones de Morlet (arriba), Paul (centro) y DOG (abajo) entre la NAO y las CPUE. El área ensombrecida en blanco indica el cono de influencia (COI) y es la región del espectro wavelet en la cual los efectos de los bordes llegan a ser importantes. Los contornos en negro son las regiones que superan el test de significación estadística (> 95% de confianza).

7.2 SOWAS

Otro de los primeros paquetes computacionales (desarrollado en 2004) para realizar análisis espectral vía la transformada continua de wavelet y que utiliza la función de Morlet es SOWAS (software for wavelet spectral analysis and synthesis) Maraun and Kurths, 2004, Maraun, 2006, Maraun et al., 2007]. SOWAS está disponible en Matlab y en R tanto para GNU/Linux como para Windows. La versión en R estuvo disponible como un paquete en el repositorio CRAN aunque actualmente ya no está disponible, pero puede obtenerse (incluido el código fuente) una copia tanto en R como en Matlab desde la siguiente dirección web: https://tocsy.pik-potsdam.de/wavelets/, donde también se incluyen los detalles para su correcta instalación, un tutorial y documentación para su uso. Una de las principales características de SOWAS es que incluye un test de significación estadística del tipo areawise [Maraun et al., 2007, Schulte et al., 2015, Schulte, 2016a]. El cual lo convierte en uno de los pocos paquetes computacionales existentes para realizar análisis espectral vía la CWT que incluye este tipo de tests. Por otro lado, y tal como se comentó previamente en la sección 5, SOWAS incluye una aproximación analítica (relación 45) para determinar la significación estadística para el caso bi-variado (coherencia). Lo cual permite analizar la relación entre dos series temporales con un gran número de elementos en poco tiempo debido a que no realiza simulaciones de Monte-Carlo para determinar la significación estadística. Sin embargo, no corrigen el sesgo presente tanto en el espectro wavelet [Liu et al., 2007] como en la coherencia de wavelet [Veleda et al., 2012]. En la figura 15 podemos apreciar las gráficas

de dos series temporales que vienen incluidas en el paquete SOWAS. La primera corresponde a el Niño 3 SST [Kaplan et al., 1998], y son los mismos datos que se presentó en la subsección anterior (7.1) pero cubriendo los años desde 1856 a 2004. La segunda serie corresponde al índice desestacionalizado de todos los datos de precipitación de la India (AIR, All Indian Rainfall index, https://mausam.imd.gov.in/imd_latest/contents/rainfall_time_series.php y cubren el periodo 1871–2003 [Mooley and Parthasarathy, 1984]. La figura 16 muestra los espectros wavelet para el Niño 3 (arriba) y para el AIR (abajo) obtenidos mediante SOWAS y utilizando dos tests de significación estadística, un *pointwise* (lineas negras delgadas) y un *areawise* (lineas negras gruesas). Como se puede apreciar el resultado más evidente es que existen un gran número de puntos espectrales tiempo-escala que se consideran estadísticamente significativos en ambos tests. Sin embargo, no todos los puntos tiempo-escala que son estadísticamente significativos con el test *pointwise* lo son con el test *areawise*. Esto puede indicar que parte de los puntos tiempo-escala con el test *pointwise* (arriba) podrían deberse al problema de la multiplicidad o comparaciones múltiples (inflación del error tipo I) [Maraun et al., 2007, Polanco-Martínez, 2019, Polanco-Martínez, 2020]. Por lo cual, se debería tener cierta precaución al analizar la información obtenida mediante un test *pointwise*, no sólo de los espectros estimados con SOWAS si no también y de manera particular con otros paquetes computacionales que sólo usan un test del tipo *pointwise*.



Figura 15: Serie temporal de anomalías mensuales de el Niño 3 SST para el periodo 1856-2004 (N=1788 elementos) [Kaplan et al., 1998] (arriba). Serie temporal de los valores mensuales del índice desestacionalizado (anomalías) de precipitación de la India (AIR) para el periodo 1871–2003 (N=1596 elementos) [Mooley and Parthasarathy, 1984] (abajo).



Figura 16: Espectros wavelet vía la transformada continua de wavelet utilizando la función Morlet obtenidos mediante el paquete computacional SOWAS (en R) para las series Niño 3 SST (arriba) y AIR (abajo). Los parámetros de entrada para poder estimar los espectros son: wsp(nino3/air, s0=0.5, noctave=5, nvoice=10, nreal=2000, units=''years'', arealsiglevel=0.90). Donde nino3/air indican el conjunto de datos de entrada, los cuales deben ser un objeto del tipo ts (time series). Todos los otros parámetros han sido descritos previamente, excepto nreal y arealsiglevel. El primero indica el número de simulaciones de Monte-Carlo (2000 en estos ejemplos) y el segundo parámetro se usa para poder ejecutar el test tipo areawise y debe tener un valor 0.90. Esto es, el nivel de significación estadística es del 0.90 (90 % de nivel de confianza). Los contornos negros delgados indican los puntos tiempo-escala que superan el test del tipo pointwise mientras que los contornos negros gruesos los puntos espectrales que superan el test areawise. Las curvas negras indican el cono de influencia.

Por otro lado, la coherencia de wavelet (WCO) y la fase de la coherencia (WPH) entre el Niño 3 SST y el AIR se muestran en la figura 17. Como se puede observar, el resultado más llamativo es que los puntos espectrales tiempo-escala obtenidos tanto con el test tipo *pointwise* (lineas negras delgadas) como con el test tipo *areawise* (lineas negras gruesas) son prácticamente los mismos, excepto la pequeña área espectral situada entre los años 1981 y 1984 y con unas escalas de entre 1.6 y 2 años, la cual no es estadísticamente significativa al considerar el test del tipo areawise. La explicación más plausible es que se deba al problema de la multiplicidad. Por otro lado, un resultado que llama la atención es que, y a pesar de que las dos series muestran una fuerte coherencia ("correlación) durante varios intervalos de tiempo y escalas, ninguna de las tres áreas espectrales que superan ambos tests están en fase. Por otro lado, no es trivial determinar que serie temporal lidera en un determinado intervalo temporal y banda de escalas, debido a que la coherencia de wavelet, al menos la estimada con SOWAS y con la mayoría de los paquetes computacionales, no incluye una inferencia causal (como los test de causalidad) entre dos series temporales [Olayeni, 2016, Polanco-Martínez, 2019]. Esto complica la interpretación de los resultados y va más allá del objetivo de este trabajo. Sin embargo se pueden consultar los siguientes trabajos [Torrence and Webster, 1999, Roy et al., 2017, Schulte, 2019] para una explicación a detalle sobre las fases desde un punto de vista climático y [Olayeni, 2016] donde implementan un test de causalidad incluido al estimar la coherencia de wavelet aunque el software de esta herramienta no está disponible.

7.3 Biwavelet

Biwavelet (*Conduct Univariate and Bivariate Wavelet Analyses*) es unos de los paquetes computacionales más populares para realizar análisis espectral mediante la transformada continua de wavelet y utilza las funciones de Morlet, Paul y DOG. Biwavelet está programado en R, fue escrito por Tarik C. Gouhier como un *port* de un paquete Matlab escrito por Aslak Grinsted [Grinsted et al., 2004] (véase http://grinsted.github.io/wavelet-coherence/) y por Christopher Torrence & Gilbert P. Compo [Torrence and Compo, 1998] y está disponible en CRAN (https://CRAN.Rproject.org/package=biwavelet) y GitHub (https://github.com/tgouhier/biwavelet). A diferencia de los paquetes computacionales de donde está basado, biwavelet incluye cuatro importantes características: (1) posibilidad de usar tres funciones wavelet (Morlet, Paul Y DOG); (2) incluye las correcciones para el espectro wavelet sugerido por [Liu et al., 2007] así como las correcciones para la coherencia sugeridas por [Veleda et al., 2012]; (3) incluye una función para calcular la disimilitud entre dos o más espectros wavelet [Rouyer et al., 2008a, Rouyer et al., 2008b]; (4) posiilidad para estimar la coherencia parcial de wavelet para tres series temporales (aunque esto está más allá de los objetivos de este trabajo de revisión).



Figura 17: Coherencia normalizada de wavelet obtenida mediante la transformada continua de wavelet (Morlet) utilizando el paquete SOWAS (en R) entre las series temporales de el Niño 3 SST y el AIR. Los parámetros de entrada utilizados para estimar la coherencia de wavelet son: wco(nino3, air, s0=0.5, noctave=5, nvoice=10, sw=0.5, tw=1.5, units=''years'', arealsiglevel=0.90). Todos estos parámetros han sido descritos previamente, excepto sw y tw que son los parámetros de suavizado en el dominio de las escalas y del tiempo, respectivamente. Es importante comentar que para poder estimar el test del tipo areawise es necesarios que sw=0.5, tw=1.5 y arealsiglevel=0.90. Esto es, el nivel de significación estadística es del 0.90 (90% de nivel de confianza). Los contornos negros delgados indican los puntos tiempo-escala que superan el test del tipo *pointwise* mientras que los contornos negros gruesos los puntos espectrales que superan el test areawise. Las curvas negras indican el cono de influencia.

Para ejemplificar el uso del paquete Biwavelet se utiliza el conjunto de datos de nombre enviro. data que está contenido en el paquete (Figura 18). enviro.data contiene tres conjuntos de índices climáticos: el Niño-Oscilación del Sur (ENSO) multivariado (MEI, Multivariate ENSO Index) [Wolter and Timlin, 2011], la oscilación del giro del Pacífico Norte (PNGO, The North Pacific Gyre Oscillation) [Di Lorenzo et al., 2008] y la oscilación decadal del Pacífico (PDO, The Pacific Decadal Oscillation) [Mantua and Hare, 2002]. Las series cubren el intervalo temporal 1950--2009, tienen una frecuencia mensual y pueden obtenerse de https://psl.noaa.gov/enso/mei/, http://www.o3d.org/npgo/index.html y https://www.ncdc.noaa.gov/teleconnections/pdo/. En la figura 19 se presentan los espectros wavelet no corregidos ante el sesgo intrínsecamente presente al estimar el espectro wavelet. Esto es, una artificial y sistemática reducción del poder espectral en las escalas (o periodos) más cortas así como un aumento del poder espectral en las escalas más largas [Liu et al., 2007]. Por otro lado, en la figura 20 se presentan los espectros ya corregidos mediante la ténica propuesta por [Liu et al., 2007] y que está incluida en Biwavelet. Los espectros wavelet fueron estimados mediante el paquete Biwavelet utilizando la función wavelet de DOG (m=2), esto con el objetivo de poder analizar escalas (periodos) decadales, los detalles computacionales están descritos en el pie de las figuras 19 y 20. Los resultados más visibles son: (1) la fuerte variabilidad en el espectro del ENSO en escalas entre 2 y 4 años, lo cual está en concordancia con lo obtenido en las dos subsecciones anteriores y con otros trabajos [Torrence and Compo, 1998, Wolter and Timlin, 2011]; (2) la fuerte variabilidad en los espectros del NPGO y de la PDO en escalas mayores a los 4 años, lo cual está en concordancia con lo esperado [Di Lorenzo et al., 2008, Mantua and Hare, 2002]. Por otro lado, y con lo que respecta a las diferencias entre los espectros no corregidos y los corregidos, para este ejemplo no hay diferencias muy notables entre los espectros corregidos y sin corregir. Finalmente, nótese que los puntos espectrales timepo-escala que superan los tests de significación estadística son invariantes para ambos conjuntos de espectros (corregidos y no corregidos), tal como se comentó previamente en este trabajo.



Figura 18: Indices climáticos para el ENSO (arriba), el PNGO (centro) y la PDO (abajo). Cubren el periodo 19502009 con una frecuencia mensual y cada índice contiene 720 elementos.

Finalmente, la Figura 21 muestra la coherencia normalizada de wavelet entre el ENSO y la PDO obtenida mediante el paquete Biwavelet utilizando la función DOG (m=2) y teniendo en cuenta

la corrección en la coherencia sugerida por [Veleda et al., 2012] (los detalles computacionales se encuentran en el pie de figura). Se han utilizado los índices de el ENSO y la PDO debido a que es bien conocida la fuerte relación entre estos dos fenómenos y por tanto la relación entre sus respectivos índices, incluso la PDO es frecuentemente descrita como un patrón de variabilidad climática similar al ENSO [Zhang et al., 1997, Mantua and Hare, 2002]. El resultado más evidente, el cual es esperado, es la fuerte correlación existente entre ambos índices a diferentes escalas e intervalos temporales donde las coherencias de wavelet están en fase (la dirección de las flechas son horizontales y hacia la derecha) en la mayoría de los casos. Por ejemplo, estas fuertes coherencias tienen lugar desde escalas interanuales, entre 2 y 4 años o entre 4 y 8 años, hasta escalas decadales e interdecadales (mayores a los 10 años). Sin embargo, es importante mencionar que al menos para las escales menores a la decadal estas fuertes coherencias entre el ENSO y la PDO se ven interrumpidas en el tiempo a diferencia de las escalas mayores a los 24 años donde las coherencias no están interrumpidas en el tiempo. La explicación de esto es debido a que la PDO varía principalmente en escalas decadales y que el ENSO también presenta variabilidad decadal aunque de menor intensidad que la variabilidad interanual (de entre 2 y 4 años) [Torrence and Webster, 1999, Zhang et al., 1997, Mantua and Hare, 2002]. Por último, es importante mencionar que no se muestran las correlaciones de wavelet sin corregir debido, al menos para este ejemplo, no hay diferencias significativas entre la coherencia corregida y no corregida.



Figura 19: Espectros wavelet no corregidos para los índices climáticos ENSO (arriba), NPGO (centro) y PDO (abajo). Los parámetros utilizados para generar estos resultados son los siguientes: wt(enso/npgo/pdo, mother="dog", sig.level=0.95, sig.test=0). Donde wt es la función contenida en Biwavelet para estimar el espectro wavelet, enso/npgo/pdo son los datos de entrada en formato matriz y donde los años (primera columna) deben de estar en formato decimal, sig.level indica el nivel de signicación, y sig.test indica el uso de un test tipo x^2 para estimar la signicación estadística del espectro. Las regiones sombreadas en blanco indican el cono de influencia.

7.4 WaveletComp

El último paquete computacional que se presenta para realizar análisis espectral uni- y bivariado mediante la transformada continua de wavelet es WaveletComp [Roesch and Schmidbauer, 2018b]. Este paquete computacional está programado en lenguaje R, está disponible en el repositorio CRAN (https://CRAN.R-project.org/package=WaveletComp) y fue escrito por Angi Rösch & Harald Schmidbauer en 2014. Es a día de hoy uno de los paquetes más avanzados para realizar análisis espectral y, además está muy bien documentado. Las principales ventajas de WaveletComp son: (1) contiene varios modelos ("ruidos de fondo") para generar las series surrogadas, e.g., ruido blanco, random shuffle (permuta los elementos de las series bajo estudio), Fourier based (estima la transformada de Fourier de las series bajo análisis y luego "randomiza" los ángulos de la fase o las amplitudes), $AR(\rho)$ y ARIMA), usadas para estimar la significación estadística; (2) contiene una gran cantidad de opciones para suavizar el espectro wavelet y la coherencia, ya sea en el dominio del tiempo o de la escala, i.e., se tienen disponibles las siguientes ventanas o funciones de suavizado: Bartlett, triangular, boxcar, Hanning y Blackman; (3) tienen en cuenta las rectificaciones del espectro uni-variado [Liu et al., 2007] y bi-variado [Veleda et al., 2012]; (4) es posible reconstruir las series temporales descompuestas mediante la transformada de wavelet; (5) proporcionan una gran variedad de opciones y versatilidad para graficar los resultados, e.g., contienen una función para estimar el espectro y otra para dibujarlo. Las únicas limitaciones hasta donde sabemos son: (1) sólo es posible usar la función wavelet de Morlet; (2) debido al uso de un método intensivo como Monte-Carlo para estimar la significación estadística al usar un número grande de simulaciones (e.g. 1000) el tiempo de proceso es relativamente grande, e.g. para un par de series de 1536 elementos se tarda cerca de 25 minutos en un ordenador portátil con un Intel core i7 utilizando un sólo procesador; (3) no incluye un test del tipo areawise, por lo cual existirán puntos tiempo-escala en el espectro (bi- y uni-variado) que podrían deberse al problema de la multiplicidad.



Figura 20: Espectros wavelet corregidos para los índices climáticos ENSO (arriba), NPGO (centro) y PDO (abajo). Los parámetros utilizados para generar estos resultados son los siguientes: wt(enso/npgo/pdo, mother='dog', sig.level=0.95, sig.test=0). Donde wt es la función contenida en Biwavelet para estimar el espectro wavelet, enso/npgo/pdo son los datos de entrada en formato matriz y donde los años (primera columna) deben de estar en formato decimal, sig.level indica el nivel de significación, y sig.test indica el uso de un test tipo χ² para estimar la significación estadística del espectro. Las regiones sombreadas en blanco indican el cono de influencia.

A continuación reproducimos la figura 5 de [Roesch and Schmidbauer, 2018a] que fue realizada con el paquete WaveletComp, donde la serie temporal a estudio fue generada mediante (función **periodic.series**) una función sinusoidal más ruido Gaussiano (media cero y varianza unitaria) con un periodo de 50 UA (unidades arbitrarias), una fase igual a cero y con 1000 elementos. Como se puede observar el espectro wavelet (Figura 22, centro) localiza perfectamente la señal periódica en 50 UA, aunque hay más puntos espectrales tiempo-escala que superan el test de significación estadística, esto se debe al problema de la multiplicidad o múltiples comparaciones, y esto fue anteriormente discutido con más detalle. Otra de las funcionalidades del paquete WaveletComp al estimar el espectro es que es posible acotar las escalas del espectro a estimar, como en este caso se estima de las 16 UA a 128 UA. Por otro lado, en la Figura 22 (abajo) se puede observar la reconstrucción de la serie original partiendo del resultado obtenido al aplicar la transformada de wavelet a la serie temporal original. Ambas series son bastante parecidas, por ejemplo, la distancia (estimada mediante la función **CCorDistance** del paquete **R** TSdist [Mori et al., 2016]) entre la serie original y la reconstruida es cercano a cero (0.0224) (donde cero es el valor que se obtiene al calcular la distancia para una misma serie temporal).



Figura 21: Coherencia normaliza de wavelet estimada entre los índices ENSO y PDO mediante Biwavelet y utilizando la función DOG (m=2). Los parámetros utilizados para generar estos resultados son los siguientes: wtc(enso, pdo, mother="dog", nrands=1000, sig.level=0.95, sig.test=0). Donde wtc es la función en Biwavelet para estimar la coherencia de wavelet, nrands indica el número de simulaciones de Monte-Carlo y los otros tres parámetros han sido definidos previamente. Las pequeñas echas indican las fases de la coherencia de wavelet.

En la Figura 23 se recrea el ejercicio presentado en [Roesch and Schmidbauer, 2018a] (Figura 30, página 31). El panel superior de esta figura muestra dos series sinusoidales contaminadas por ruido Gaussiano con media cero y varianza unitaria, X e Y, y cuyo número de elementos de cada serie es 1536. Es importante tener en cuenta que la serie X contiene un periodo de 64 UA para los primeros y últimos 384 elementos mientras que para el intervalo 385–1152 (768 elementos) el periodo es de 128 UA. Por otro lado, la serie X en sus señales periódicas tiene una fase igual a cero. Sin embargo, la serie Y tiene un periodo de 128 UA y una fase igual a $-\frac{4}{45}\pi$ radianes para toda la serie. Por esta razón, es relativamente fácil visualizar que durante el intervalo 385-1152 es X quien lidera a Y, pero no es así para los otros intervalos debido a que no es clara esta relación (véase figura superior y central). Es importante mencionar que el objetivo de este ejemplo es mostrar como la correlación cruzada de wavelet (figura central e inferior) es capaz hasta cierto punto de determinar las relaciones que (no) están en fase y que serie o proceso "lidera" a la otra (siempre y cuando se conozca a priori la relación causa-efecto de los procesos a estudio, debido a que como anteriormente hemos comentado, la correlación cruzada o la coherencia de wavelet no son las herramientas adecuadas para determinar una relación causa-efecto entre dos series temporales), pero que tiene límites, y por ello es recomendable usar la coherencia de wavelet. Como se puede observar en la Figura 24, la coherencia normalizada de wavelet si es capaz de determinar adecuadamente en que intervalo de las series X e Y existe una relación coherente y en fase (flechas apuntando hacia arriba con una inclinación de unos 45° con respecto al eje X), lo cual permite establecer que durante el intervalo 385–1152 la serie X lidera a la Y.



Figura 22: Serie temporal sinusoidal, con un periodo de 50 UA y una fase de cero, perturbada por ruido Gaussiano con media cero y varianza unitaria (N=1000 elementos) (arriba). Espectro wavelet de la serie sinusoidal contaminada por ruido (centro). La línea horizontal indica la escala o periodo de 50 UA. Las líneas de contorno indican los puntos tiempo-escala que superan el test de significación estadística (95% de confianza). Las regiones sombreadas indican el cono de influencia. Serie sinusoidal original (en negro) y serie reconstruida (en rojo) (abajo). Todos los parámetros utilizados para generar esta figura se encuentran descritos en [Roesch and Schmidbauer, 2018a] (Fig. 5, pág.s 12 y 13).



Figura 23: Series temporales sinusoidales perturbadas con ruido Gaussiano con media cero y varianza unitaria (N=1536 elementos) X e Y (arriba) (ver texto para más detalles de como se han creado las series X e Y). Correlación cruzada de wavelet estimada entre las series X e Y (centro y abajo). Las líneas de contorno indican los puntos tiempo-escala que superan el test de significación estadística (95% de confianza). Las regiones sombreadas indican el cono de

influencia. Las pequeñas flechas indican las fases de la coherencia. La figura inferior fue realizada limitando el área de las flechas de las fases donde las transformdas de wavelet de X o de Y muestran significación estadística para delimitar los artefactos que aparecen en la figura central utilizando la opción which.arrow.sig=''wt''. Todos los parámetros utilizados para generar esta figura se encuentran descritos en [Roesch and Schmidbauer, 2018a] (Fig, 30).

8. Perspectivas de futuro

En este trabajo de revisión se han presentado los principales principios matemáticos y computacionales de una de las técnicas más usadas en el procesamiento de señales, esto esto, el análisis espectral vía la transformada continua de wavelet para los casos uni- y bi-variado. Se cubren las tres principales funciones wavelet utilizadas en el análisis espectral de wavelet: Morlet, Paul y DOG. Así como también se presentan las dos principales pruebas de significación estadística tanto para el espectro wavelet como para la coherencia normalizada de wavelet: pruebas del tipo pointwise y pruebas del tipo areawise. La primera está basada en comparar cada punto tiempoescala del espectro con respecto a un cierto nivel de confianza, por esta razón los test del tipo *pointwise* no están libres del problema de la multiplicidad o comparaciones múltiples. Mientras que los test del tipo areawise no sólo tienen en cuenta a la vez un determinado punto espectral tiempo-escala, también tienen en cuenta los puntos espectrales vecinos, por esta razón son más versátiles para manejar de manera más adecuada el problema de la multiplicidad aunque no consigan eliminarlo por completo. Por otro lado, también se discuten y se proporcionan soluciones estadístico-computacionales al problema del sesgo del espectro wavelet tanto para el caso uni-variado [Liu et al., 2007] como para el bi-variado [Veleda et al., 2012]. También se presentan ejemplos del uso de estas técnicas con datos reales y se ejemplifica el uso de los principales



paquetes computacionales que están disponibles, de manera particular los que están libremente distribuidos.

Figura 24: Coherencia normalizada de wavelet estimada entre las series temporales X e Y. Las líneas de contorno indican los puntos tiempo-escala que superan el test de significación estadística (95% de confianza). Las regiones sombreadas indican el cono de influencia. Las pequeñas flechas indican las fases de la coherencia. Todos los parámetros utilizados para generar esta figura se encuentran descritos en [Roesch and Schmidbauer, 2018a] (Figura 31).

Respeto a las perspectivas de futuro del análisis espectral vía la transformada continua de wavelet consideramos de importancia comentar los tres siguientes avances a tener en cuenta en los próximos años. En primer lugar, ir más allá del análisis bi-variado al multi-variado. Aunque en este artículo de revisión se comentó de la existencia de una metodología [Ng and Chan, 2012] y su implementación computacional (Biwavelet) [Gouhier et al., 2019] para el caso tri-variado (la coherencia parcial de wavelet y la coherencia múltiple de wavelet). Sin embargo, esta herramienta sólo está diseñada para el caso tri-variado. Afortunadamente existen otras implementaciones para el caso multi-variado, e.g., Aguiar-Conraria and Soares, 2014, Soon et al., 2014, Hu and Si, 2016, Velasco-Herrera et al., 2017, Chavez and Cazelles, 2019, Oygur and Unal, 2020]. Sin embargo, de todas estas técnicas de análisis espectral de wavelet las únicas que disponen de una implementación computacional que están disponibles son: [Aguiar-Conraria and Soares, 2014]⁸, [Chavez and Cazelles, 2019]⁹, y [Oygur and Unal, 2020]¹⁰. Por lo que quizá la razón del porque no es tan común el uso del caso multi-variado no sólo se debe a que no existen un gran número de paquetes computacionales libremente disponibles en Internet y bien documentados, si no también a que estas técnicas han sido desarrolladas hace relativamente poco tiempo. El segundo punto a considerar está relacionado con el hecho de que la correlación cruzada de wavelet o la coherencia normalizada de wavelet para el caso bi-variado y la correlación múltiple de wavelet y la coherencia parcial de wavelet para el caso multivariado, no son herramientas adecuadas para determinar una relación causa-efecto entre dos o más variables a estudio. Por lo que es altamente recomendable el uso y desarrollo de tests de causalidad tipo Granger-Geweke (véase [Granger, 1969, Dhamala et al., 2018) incluidos de manera intrínseca al estimar el espectro wavelet bio multi-variado [Dhamala et al., 2008]. Por ejemplo, unos de los pocos trabajos que existen a día de hoy donde se desarrollan estas técnicas para el análisis espectral de wavelet para el caso bi-variado (coherencia) es [Dhamala et al., 2008] y de manera particular [Oygur and Unal, 2020]. Desafortunadamente, hasta donde sabemos aun no existen desarrollos para el caso multi-variado y las implementaciones computacionales del caso bi-variado no están disponibles, por lo cual esto impide su uso hasta cierto punto. Por ello es importante desarrollar implementaciones computacionales de estas técnicas y que sean de libre acceso. El tercer punto está relacionado con el uso y desarrollo de técnicas de análisis espectral de wavelet para el caso cuando las series temporales a estudio son irregulares o no están equiespaciadas temporalmente. Actualmente existen una gran cantidad de técnicas para análisis espectral de wavelet mediante la transformada continua de wavelet y sus respectivas implementaciones computacionales, como todas las técnicas y paquetes computacionales presentados en este trabajo de revisión, pero están limitadas para el caso de cuando las series temporales a estudio son regulares. Sin embargo, en muchas áreas de las ciencias e ingeniería las series temporales no siempre están equiespaciadas temporalmente. Es cierto que en muchos casos la interpolación puede utilizarse para convertir estas series irregulares en regulares para después estimar el espectro wavelet. Sin embargo, la interpolación implica un conocimiento previo del comportamiento de la variable a estudio y suaviza los datos de tal modo que al calcular el espectro puede suprimir información espectral en las altas frecuencias, por lo cual la interpolación debería evitarse [Schulz and Stattegger, 1997, Schulz and Mudelsee, 2002, Polanco-Martínez, 2012, Polanco-Martínez, 2014]. Otra solución consiste en usar técnicas de análisis espectral de wavelet vía la transformada continua especialmente diseñadas para poder trabajar directamente con series irregulares. A pesar de que existen muy pocas, algunas excepciones son los wavelets de Foster o transformada Z de wavelet por pesos [Foster, 1996], la cual permite estimar el espectro wavelet uni-variado mediante la función Morlet. Algunas extensiones de esta metodología pueden encontrarse en [Witt and Schumann, 2005] o en [Polanco-Martínez and Faria, 2018]. Mucho más recientemente [Lenoir and Crucifix, 2018] presentaron nuevos desarrollos para estimar el espectro wavelet caso uni-variado para series irregulares, incluido un paquete computacional en https://github.com/guillaumelenoir/WAVEPAL, y es sin lugar a dudas a día de hoy la implementación estadística-computacional más avanzada sobre este técnica. Sin embargo, aun no existe un desarrollo similar para el caso bi-variado y mucho menos para el multi-variado, y más aun, que tengan en cuenta la dirección de causa-efecto entre dos o más series temporales analizadas. Lo cual implica que queda un largo camino por recorrer y gran reto a superar.

Referencias bibliográficas

Afifi M, Fassi-Fihri A, Marjane M, Nassim K, Sidki M, Rachafi S (2002): Paul wavelet-based algorithm for optical phase distribution evaluation. *Optics Communications*, 211(1-6):47-51.

Aguiar-Conraria L, Azevedo N, Soares MJ (2008): Using wavelets to decompose the time frequency effects of monetary policy. *Physica A: Statistical mechanics and its Applications*, 387(12): 2863-2878.

Aguiar-Conraria L, Soares MJ (2014): The continuous wavelet transform: moving beyond uniand bivariate analysis. *Journal of Economic Surveys*, 28(2):344-375.

Caballero-Alfonso AM, Ganzedo U, Trujillo-Santana A, Polanco J, Santana del Pino A, Ibarra-Berastegi G, Castro-Hernández JJ (2010): The role of climatic variability on the short-term uctuations of octopus captures at the Canary Islands. *Fisheries Research*, 102(3):258-265.

Cazelles B, Cazelles K, Chavez M (2014): Wavelet analysis in ecology and epidemiology: impact of statistical tests. *Journal of the Royal Society Interface*, 11(91):20130585.

Cazelles B, Chavez M, Berteaux D, Ménard F, Vik JO, Jenouvrier S, Stenseth N (2008): Wavelet analysis of ecological time series. *Oecologia*, 156(2):287-304.

Chavez M, Cazelles B (2019): Detecting dynamic spatial correlation patterns with generalized wavelet coherence and non-stationary surrogate data. *Scientic Reports*, 9(1):7389.

Daubechies I (1992): Ten lectures on wavelets. Society for Industrial Mathematics, Philadelphia, USA.

Dhamala M, Liang H, Bressler SL, Ding M (2018): Granger-Geweke causality: Estimation and interpretation. *NeuroImage*, 175:460-463.

Dhamala M, Rangarajan G, Ding M (2008): Estimating Granger causality from Fourier and wavelet transforms of time series data. *Physical Review Letters*, 100(1):018701.

Di Lorenzo E, Schneider N, Cobb KM, Franks P, Chhak K, Miller AJ, McWilliams JC, Bograd SJ, Arango H, Curchitser E (2008): North Pacific Gyre Oscillation links ocean climate and ecosystem change. *Geophysical Research Letters*, 35(8):L8607.

Farge M (1992). Wavelet transforms and their applications to turbulence. Annual Review of Fluid Mechanics, 24(1):395-458.

Fernández I, Hernández CN, Pacheco JM (2003): Is the North Atlantic Oscillation just a pink noise? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 323:705-714.

Foster G (1996): Wavelets for period analysis of unevenly sampled time series. The Astronomical Journal, 112:1709-1729.

Gouhier TC, Grinsted A, Simko V (2019): R package biwavelet: Conduct Univariate and Bivariate Wavelet Analyses. (Version 0.20.19).

Granger CW (1969): Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 37:424-438.

Grinsted A, Moore JC, Jevrejeva S (2004): Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series. *Nonlinear Process in Geophysics*, 11:561-566.

Grossmann A, Morlet J (1984): Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 15:723-736.

Hasselmann K (1976): Stochastic climate models Part I. Theory. Tellus, 28(6):473-485.

Hsieh CHAO, Chen CS, Chiu TAIS, Lee KUOT, Shieh FJEN, Pan JIAYI, Lee MAN (2009): Time series analyses reveal transient relationships between abundance of larval anchovy and environ-

mental variables in the coastal waters southwest of Taiwan. Fishery Oceanography, 18(2):102-117.

Hu W, Si BC (2016): Multiple wavelet coherence for untangling scalespecific and localized multivariate relationships in geosciences. *Hydrology and Earth System Sciences*, 20(8):3183-3191.

Hurrell JW, Kushnir Y, Ottersen G, Visbeck M (2003): An overview of the North Atlantic oscillation In: Hurrell JW, Kushnir Y, Ottersen G, Visbeck M (eds). The North Atlantic Oscillation: climatic significance and environmental impact. Geophysical Monograph, 134.

Kaiser G (1994): A friendly guide to wavelets. Birkh., Boston.

Kaplan A, Cane MA, Kushnir Y, Clement AC, Blumenthal MB, Rajagopalan B (1998): Analyses of global sea surface temperature 1856-1991. *Journal of Geophysical Research*: Oceans, 103(C9):18567-18589.

Kumar P, Foufoula-Georgiou E (1994): Wavelet Analysis in Geophysics: An Introduction. Wavelets in Geophysics, Academic Press, London.

Kumar P, Foutoula-Georgiou E (1997): Wavelet analysis for geophysical applications. Reviews of Geophysics, 35(4):385-412.

Lane SN (2007): Assessment of rainfall-runoff models based upon wavelet analysis. *Hydrological Processes*, 21(5):586-607.

Lau KM, Weng H (1995): Climate signal detection using wavelet transform: How to make a time series sing. Bulletin of the American Meteorological Society, 76(12):2391-2402.

Lenoir G, Crucifix M (2018): A general theory on frequency and time frequency analysis of irregularly sampled time series based on projection methods part 2: Extension to time frequency analysis. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 25(1):175-200.

Liu Y, San Liang X, Weisberg RH (2007): Rectification of the bias in the wavelet power spectrum. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 24(12):2093-2102.

Machu E, Ferret B, Garçon V (1999): Phytoplankton pigment distribution from SeaWiFS data in the subtropical convergence zone south of Africa: a wavelet analysis. *Geophysical Research Letters*, 26(10):1469-1472.

Mantua NJ, Hare SR (2002): The Pacific decadal oscillation. *Journal of Oceanography*, 58(1):35-44.

Maraun D (2006): What Can We Learn from Climate Data? Methods for Fluctuation, Time/Scale and Phase Analysis. PhD thesis, University of Potsdam, Potsdam, Germany. Maraun D (2021): F.A.Q. del software SOWAS. http://tocsy.agnld. uni-potsdam.de/wavelets/.

Maraun D, Kurths J (2004): Cross wavelet analysis: significance testing and pitfalls. *Nonlinear Process in Geophysics*, 11(4):505-514.

Maraun D, Kurths J, Holschneider M (2007): Nonstationary Gaussian processes in wavelet domain: Synthesis, estimation, and significance testing. *Physical Review E*, 75(1):16707.

Ménard F, Marsac F, Bellier E, Cazelles B (2007): Climatic oscillations and tuna catch rates in the Indian Ocean: a wavelet approach to time series analysis. *Fishery Oceanography*, 16(1):95-104.

Meyers SD, Kelly BG, O'Brien JJ (1993): An introduction to wavelet analysis in oceanography and meteorology: With application to the dispersion of Yanai waves. *Monthly Weather Review*, 121(10):2858-2866.

Mi X, Ren H, Ouyang Z, Wei W, Ma K (2005): The use of the Mexican Hat and the Morlet wavelets for detection of ecological patterns. *Plant Ecology*, 179(1):1-19.

Mihanovic H, Orlic M, Pasaric Z (2009): Diurnal thermocline oscillations driven by tidal ow around an island in the Middle Adriatic. *Journal of Marine Systems*, 78:S157-S168.

Mills TC (2004): Is the North Atlantic Oscillation a random walk? A comment with further results. *International Journal of Climatology: A Journal of the Royal Meteorological Society*, 24(3):377-383.

Mooley D, Parthasarathy B (1984): Fluctuations in all-India summer monsoon rainfall during 1871-1978. *Climatic Change*, 6(3):287-301.

Mori U, Mendiburu A, Lozano JA (2016): Distance Measures for Time Series in R: The TSdist Package. *R journal*, 8(2):451-459.

Ng EK, Chan JC (2012): Geophysical applications of partial wavelet coherence and multiple wavelet coherence. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 29(12):1845-1853.

NOAA (2021): NAO index. https://psl.noaa.gov/data/correlation/nao. data. Accessed: 2021-11-17.

Olayeni OR (2016): Causality in continuous wavelet transform without spectral matrix factorization: theory and application. Computational Economics, 47(3):321-340.

Oygur T, Unal G (2020): Vector wavelet coherence for multiple time series. International *Journal* of Dynamics and Control, 9:403-409.

Percival DB, Walden AT (2006): Wavelet methods for time series analysis. Cambridge Univ Press.

Percival DP (1995): On estimation of the wavelet variance. Biometrika, 82(3):619.

Perrier V, Philipovitch T, Basdevant C (1995): Wavelet spectra compared to Fourier spectra. *Journal of Mathematical Physics*, 36(3):1506-1519.

Polanco J, Ganzedo U, Sáenz J, Caballero-Alfonso A, Castro-Hernández J (2011): Wavelet analysis of correlation among Canary Islands octopus captures per unit effort, sea-surface temperatures and the North Atlantic Oscillation. *Fisheries Research*, 107(1-3):177-183.

Polanco-Martínez J (2012): Aplicación de técnicas estadísticas en el estudio de fenómenos ambientales y ecosistémicos. PhD thesis, University of Basque Country, Leioa, España.

Polanco-Martínez JM (2014): Estimación espectral de datos ambientales no equiespaciados vía el periodograma suavizado de Lomb-Scargle. Una breve revisión. *Analítika: revista de análisis estadístico*, (8):7-23.

Polanco-Martínez JM (2019): Dynamic relationship analysis between NAFTA stock markets using nonlinear, nonparametric, non-stationary methods. *Nonlinear Dynamics*, 97(1):369-389.

Polanco-Martínez JM (2020): RolWinMulCor: An R package for estimating rolling window multiple correlation in ecological time series. Ecological Informatics, 60:101163.

Polanco-Martínez JM, Faria S (2018): Estimation of the significance of the Foster's wavelet spectrum by means of a permutation test and its application for paleoclimate records. *Boletín Geológico y Minero*, 129(3):549-564.

Polanco-Martínez JM, López-Martínez JL (2021): A non-parametric method to test the statistical significance in rolling window correlations, and applications to ecological time series. *Ecological Informatics*, 64:101379.

Rhif M, Ben Abbes A, Farah IR, Martínez B, Sang Y (2019): Wavelet transform application for/in non-stationary time-series analysis: a review. *Applied Sciences*, 9(7):1345.

Roesch A, Schmidbauer H (2018): WaveletComp 1.1: A guided tour through the R package. R package version 1.1.

Roesch A, Schmidbauer H (2018): WaveletComp: Computational Wavelet Analysis. R package version 1.1.

Rouyer T, Fromentin JM, Menard F, Cazelles B, Briand K, Pianet R, Planque B, Stenseth NC (2008): Complex interplays among population dynamics, environmental forcing, and exploitation in fisheries. *Proceedings of the National Academy Sciences*, 105(14):5420.

Rouyer T, Fromentin JM, Stenseth NC, Cazelles B (2008): Analysing multiple time series and extending significance testing in wavelet analysis. *Marine Ecology Progress Series*, 359:11-23.

Roy I, Tedeschi RG, Collins M (2017): ENSO teleconnections to the Indian summer monsoon in observations and models. *International Journal of Climatology*, 37(4):1794-1813.

Schulte J (2020): On the use of the Benjamini Hochberg procedure in wavelet analysis and its inferior performance to the cumulative arc-wise and area-wise tests. International Journal of Climatology, 40(12):5420-5427.

Schulte J, Duffy C, Najjar R (2015): Geometric and topological approaches to significance testing in wavelet analysis. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 22(2):139-156.

Schulte JA (2016): Cumulative areawise testing in wavelet analysis and its application to geophysical time series. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 23(1):45-57.

Schulte JA (2016): Wavelet analysis for non-stationary, nonlinear time series. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 23(4):257-267.

Schulte JA (2019): Statistical hypothesis testing in wavelet analysis: theoretical developments and applications to Indian rainfall. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 26(2):91-108.

Schulz M, Mudelsee M (2002): REDFIT: Estimating rednoise spectra directly from unevenly spaced paleoclimatic time series. *Computers & Geosciences*, 28(3):421-426.

Schulz M, Stattegger K (1997): SPECTRUM: Spectral analysis of unevenly spaced paleoclimatic time series. Computers & Geosciences, 23(9):929-945.

Soon W, Velasco-Herrera VM, Selvaraj K, Traversi R, Usoskin I, Chen CT, Lou JY, Kao SJ, Carter RM, Pipin V (2014): A review of Holocene solar-linked climatic variation on centennial to millennial timescales: Physical processes, interpretative frameworks and a new multiple cross-wavelet transform algorithm. *Earth-Science Reviews*, 134:1-15.

Stephenson DB, Pavan V, Bojariu R (2000): Is the North Atlantic Oscillation a random walk? *International Journal of Climatology*, 20(1):1-18.

Torrence C, Compo GP (1998): A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(1):61-78.

Torrence C, Webster PJ (1999): Interdecadal changes in the ENSO-monsoon system. *Journal of Climate*, 12(8):2679-2690.

[Vasseur and Yodzis, 2004] Vasseur, D. A. and Yodzis, P. (2004). The color of environmental noise. *Ecology*, 85(4):1146-1152.

Velasco-Herrera V, Soon W, Herrera GV, Traversi R, Horiuchi K (2017): Generalization of the cross-wavelet function. *New Astronomy*, 56:86-93.

Veleda D, Montagne R, Araujo M (2012): Cross-wavelet bias corrected by normalizing scales. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 29(9):1401-1408.

Witt A, Schumann AY (2005): Holocene climate variability on millennial scales recorded in Greenland ice cores. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 12(3):345-352.

Wolter K, Timlin MS (2011): El Niño/Southern Oscillation behaviour since 1871 as diagnosed in an extended multivariate ENSO index (MEI. ext). *International Journal of Climatology*, 31(7):1074-1087.

Zhang Y, Wallace JM, Battisti DS (1997): ENSO-like interdecadal variability: 1900-93. *Journal of Climate*, 10(5):1004-1020.

Zhang Z, Moore JC (2011): Improved significance testing of wavelet power spectrum near data boundaries as applied to polar research. *Advances in Polar Science*, 22(3):192-198.

Zwiers FW, Von Storch H (2004): On the role of statistics in climate research. *International Journal of Climatology*, 24(6):665-680.